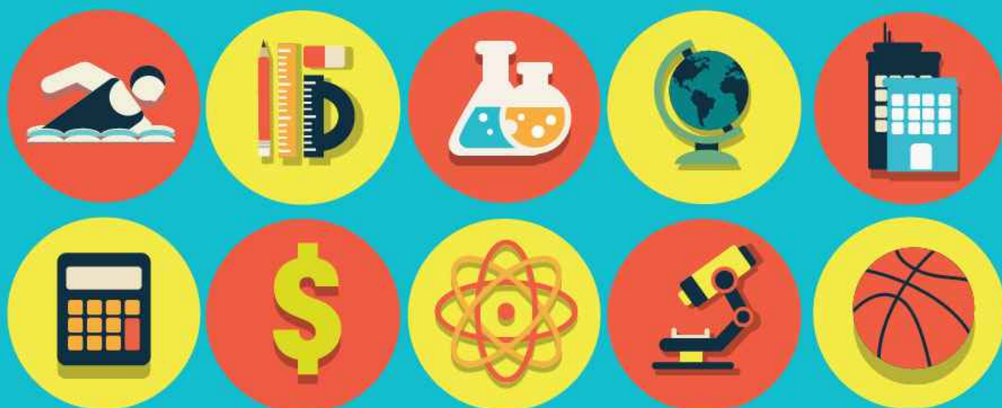
HỨA LÂM PHONG (Chủ biên)
NINH CÔNG TUẤN - Th.S ĐINH XUÂN NHÂN - PHẠM VIỆT DUY KHA

NEW

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN TRẮC NGHIỆM THỰC TẾ



- Tài liệu tham khảo dành cho Giáo viên và học sinh ôn luyện kì thi THPT Quốc Gia
- Chinh phục các bài toán **HAY - LẠ - KHÓ**
- Dựa theo 4 mức độ **NHẬN BIẾT - THÔNG HIỂU - VẬN DỤNG - VẬN DỤNG CAO.**

 NHÀ XUẤT BẢN THANH HÓA

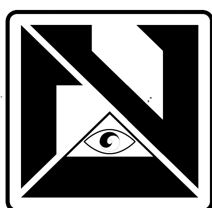
HỨA LÂM PHONG (Chủ biên)
NINH CÔNG TUẤN – ThS. ĐINH XUÂN NHÂN – PHẠM VIỆT DUY KHA

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN

TRẮC NGHIỆM THỰC TẾ

- *Tài liệu tham đảnh khảo cho Giáo viên và học sinh ôn luyện kì thi THPT Quốc Gia*
- *Chinh phục các bài toán HAY – LẠ - KHÓ*
- *Dựa theo 4 mức độ NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU – VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO*




NHÀ XUẤT BẢN THANH HÓA

Lời mở đầu

Từ lâu, *Toán học* đã trở thành một công cụ đắc lực giúp con người khám phá thế giới và đồng thời cũng chính từ các nhu cầu của loài người trong việc mở mang tri thức, nâng cao đời sống tinh thần, phát triển kinh tế, xã hội v.v... đã tạo một nguồn động lực to lớn thúc đẩy sự phát triển của Toán học đến ngày nay. Chính vì vậy, việc hiểu và vận dụng toán học vào cuộc sống là vô cùng quan trọng. Tuy nhiên, điều này vẫn còn rất hạn chế trong dạy và học ở nhà trường phổ thông.

Xuất phát từ những nhu cầu đó, nhóm tác giả đã dày công biên soạn cuốn sách này nhằm mục đích hỗ trợ cho giáo viên và các em học sinh có thêm tài liệu tham khảo phong phú, sinh động và đặc biệt đối với các em học sinh đang chuẩn bị cho kì thi THPT Quốc Gia.

Cuốn sách được trình bày theo các chủ đề bám sát nội dung chương trình giáo khoa 12 cơ bản hiện hành của Bộ Giáo dục và Đào tạo như sau:

- **Chương 1: Những ứng dụng của đạo hàm** được viết bởi thầy *Hứa Lâm Phong*, phản biện là các Thầy còn lại trong nhóm tác giả biên soạn.
- **Chương 2: Những ứng dụng của hàm số mũ, hàm số logarit** được viết bởi thầy *Ninh Công Tuấn*, phản biện là các thầy còn lại trong nhóm tác giả biên soạn.
- **Chương 3: Những ứng dụng của các khối hình trong không gian** được viết bởi thầy *Phạm Việt Duy Kha*, phản biện là các thầy còn lại trong nhóm tác giả biên soạn.
- **Chương 4: Những ứng dụng của nguyên hàm, tích phân** được viết bởi thầy *Đinh Xuân Nhân*, phản biện là các thầy còn lại trong nhóm tác giả biên soạn.

Về cấu trúc chung của từng chương, nhóm tác giả cố gắng trình bày thật khoa học theo các phần sau:

A. Tóm tắt lý thuyết và các kiến thức liên quan cần nhớ.

B. Một số các bài toán thực tế tiêu biểu.

C. Bài tập trắc nghiệm khách quan.

D. Hướng dẫn giải chi tiết bài tập trắc nghiệm.

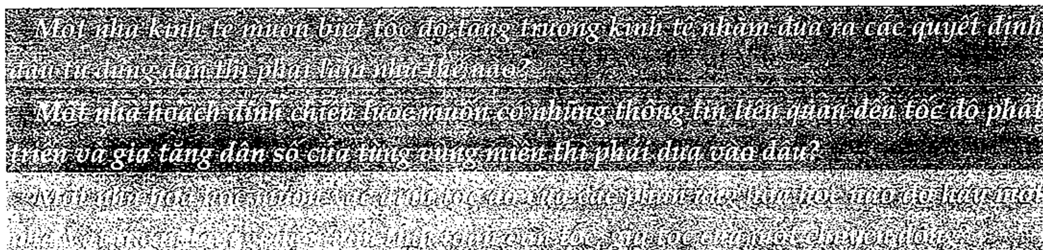
Trong quá trình biên soạn tài liệu này, chúng tôi đã tham khảo nhiều tài liệu khác nhau về các chuyên đề này. Nhân đây, cho phép nhóm tác giả được trân trọng gửi lời cảm ơn chân thành đến các thầy, cô và các tác giả trên.

Mặc dù chúng tôi đã rất cẩn thận, nghiêm túc trong các tính toán và cách trình bày của mình nhưng chắc chắn không tránh được những thiếu sót nhất định. Rất mong nhận được các ý kiến đóng góp từ quý bạn đọc để cuốn sách ngày càng hoàn thiện hơn.

Nhóm tác giả

CHƯƠNG I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

Toán học bắt nguồn từ thực tiễn, và mọi lí thuyết toán học dù trừu tượng đến đâu cũng đều tìm thấy ứng dụng của chúng trong thực tế cuộc sống. Đến với chương này, chúng ta sẽ cùng nhau tìm hiểu về các "Ứng dụng của Đạo Hàm" không chỉ đối với Toán học mà còn đối với các ngành khoa học kỹ thuật khác; bởi lẽ Đạo hàm không chỉ dành riêng cho các nhà Toán học, mà đạo hàm còn được ứng dụng rất nhiều trong cuộc sống và các ngành khoa học khác, ví dụ có thể kể đến như:



Và hơn thế nữa, trong thực tiễn đời sống luôn có rất nhiều những bài toán liên quan đến tối ưu hóa nhằm đạt được lợi ích cao nhất như phải tính toán như thế nào để làm cho chi phí sản xuất là thấp nhất mà lợi nhuận đạt được là cao nhất?,...

Chúng ta hãy cùng nhau tìm hiểu, khám phá và mở mang thêm cho mình những hiểu biết về ứng dụng của đạo hàm thông qua bố cục trình bày của chương như sau:

- ***Phần 1.1:** Tóm tắt lí thuyết và các kiến thức liên quan đến đạo hàm.*
- ***Phần 1.2:** Các bài toán thực tế ứng dụng đạo hàm.*
- ***Phần 1.3:** Các bài toán trắc nghiệm khách quan.*
- ***Phần 1.4:** Đáp án và hướng dẫn giải câu hỏi trắc nghiệm.*

PHẦN 1.1: TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

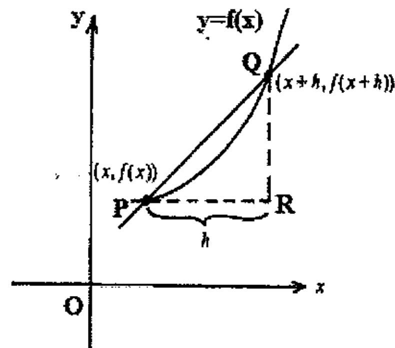
*Để tìm hiểu các ứng dụng của đạo hàm, trước tiên ta cần hiểu một cách thấu đáo về **khái niệm của đạo hàm**. Bài toán cơ bản là nguồn gốc nảy sinh khái niệm đạo hàm, một thuộc về lĩnh vực **Hình học** và một đến từ **Vật lí**.*

• Đối với bài toán hình học: Xác định tiếp tuyến của một đường cong.

*Nếu như trước đây, nhiều bài toán của Đại số chỉ có thể được giải quyết nhờ vào công cụ và phương pháp của Hình học, thì kể từ thế kỉ XVI, với hệ thống kí hiệu do **Viète (1540-1603)** đề nghị vào năm 1591, Đại số đã tách khỏi Hình học, phát triển một cách độc lập với những phương pháp có sức mạnh lớn lao. Nhận thấy sức mạnh ấy, **Descartes (1596-1650)** và **Fermat (1601-1665)** đã khai thác nó vào nghiên cứu Hình học bằng việc xây dựng nên **Hình học giải tích**. Sự ra đời của Hình học giải tích khiến cho vấn đề nghiên cứu nhiều đường cong được đặt ra. Tuy nhiên, bài toán này chỉ được các nhà toán học thời kì trước giải quyết đối với một số đường đặc biệt (đường tròn, đường Conic, ...) bằng công cụ của hình học cổ*

điển nhưng với hàng loạt những đường cong mới xuất hiện, bài toán xác định tiếp tuyến tuyến của một đường cong đòi hỏi một phương pháp tổng quát hơn.

Khái niệm tiếp tuyến lúc này được hiểu theo những quan niệm mới như là vị trí "tới hạn" của cát tuyến hay đường thẳng trùng với một phần vô cùng nhỏ với đường cong tại tiếp điểm. Chính từ quan niệm "vị trí tới hạn" này mà hệ số góc k của tiếp tuyến với đường cong $y=f(x)$ được định nghĩa (theo ngôn ngữ ngày nay) bởi biểu thức



$$k=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

- ***Đối với bài toán vật lí: Tìm vận tốc tức thời.***

*Thừa nhận rằng có thể xem vận tốc tức thời v_{tt} của vật thể có phương trình chuyển động là $s=S(t)$ là giới hạn của vận tốc trung bình trong khoảng thời gian $(t;t+\Delta t)$ khi $\Delta t\to 0$, **Newton (1643 – 1727)** cũng đã đi đến biểu thức xác định v_{tt} (có cùng bản chất với biểu thức hệ số góc của tiếp tuyến) mà theo ngôn ngữ ngày nay ta viết là:*



$$v_{tt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=S'(t)$$

*Ngoài ra, ta cũng có thể bắt gặp một số khái niệm khác của đạo hàm như **"đạo hàm - tốc độ biến thiên của hàm số"** hay **"đạo hàm – công cụ xấp xỉ hàm số"**.*

Từ đây ta đưa ra định nghĩa của đạo hàm:

2.1.1 Định nghĩa đạo hàm tại một điểm.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$, $x_0\in(a;b)$, $x_0+\Delta x\in(a;b)$.

Nếu tồn tại, giới hạn (hữu hạn) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ được gọi là *đạo hàm* của $f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

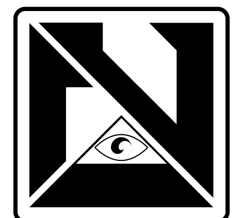
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2.1.2 Các quy tắc tính đạo hàm và bảng công thức đạo hàm thường gặp.

Các quy tắc tính đạo hàm.

Giả sử $u=u(x)$, $v=v(x)$, $w=w(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

- $(u+v-w)'=u'+v'-w'$
- $(uv)'=u'v+v'u$
- $(uvw)'=u'vw+v'uw+w'uv$
- $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\ (v=v(x)\neq 0)$
- $(ku)'=ku'$ (với k là hằng số)
- $\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2}\ (v=v(x)\neq 0)$



Bảng công thức các đạo hàm thường gặp

Đạo hàm của $f(x)$ với x là biến số	Đạo hàm của $f(u)$ với u là một hàm số
$(k)'=0$ (với k là hằng số)	
$(kx)'=k$. (với k là hằng số)	$(ku)'=k.u'$ (với k là hằng số)
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(u^n)'=nu^{n-1}.(u)'$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}\ (x\neq 0)$	$\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}\ (u(x)\neq 0)$
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},(x>0)$	$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}},(u(x)>0)$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=\cos u.(u)'$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-\sin u.(u)'$
$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right)$	$(\tan u)'=\frac{(u)'}{\cos^2 u}=(1+\tan^2 u).(u)'$ $\left(u(x)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right)$
$(\cot x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$ $(x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z})$	$(\cot u)'=\frac{-(u)'}{\sin^2 u}=-(1+\cot^2 u).(u)'$ $(u(x)\neq k\pi,k\in\mathbb{Z})$
$(a^x)'=a^x\ln a,\ (0<a\neq 1)$	$(a^u)'=a^u\ln a.(u)',\ (0<a\neq 1)$
$(e^x)'=e^x$	$(e^u)'=e^u.(u)'$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},(x>0)$	$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}(u(x)>0),(0<a\neq 1)$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}\ (x>0)$	$(\ln u)'=\frac{u'}{u}(u(x)>0)$

Đạo hàm của một số hàm phân thức hữu tỉ thường gặp

Hàm số	Đạo hàm của hàm số
$y=\frac{ax+b}{cx+d}$	$y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$
$y=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$	$y'=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}$

2.1.2. Tính đơn điệu của hàm số.

Định nghĩa: Gọi K là khoảng $(a;b)$ hoặc đoạn $[a;b]$ hoặc nửa khoảng $[a;b),(a;b]$ và hàm số $f(x)$ xác định trên K.

Hàm số $y=f(x)$ **đồng biến (tăng)** trên K nếu $\forall x_1,x_2 \in K: x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Hàm số $y=f(x)$ **nghịch biến(giảm)** trên K nếu : $\forall x_1,x_2 \in K: x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Hàm số **đồng biến** hoặc **nghịch biến** trên K được gọi là **hàm số đơn điệu** trên K.

Các định lí:

❖ **Định lí 1:** Cho hàm số $y=f(x)$ **có đạo hàm** trên $(a;b)$.

- Nếu $f'(x)>0, \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $f(x)$ *đồng biến* trên $(a;b)$.
- Nếu $f'(x)<0, \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $f(x)$ *nghịch biến* trên $(a;b)$.

❖ **Định lí 2: (Điều kiện cần và đủ để hàm số đơn điệu trên K)**

Cho hàm số $y=f(x)$ **có đạo hàm** trên $(a;b)$.

- Hàm số $f(x)$ ***đồng biến*** trên $(a;b) \Leftrightarrow f'(x)\geq 0, \forall x\in(a;b)$ và phương trình $f'(x)=0$ có ***hữu hạn nghiệm thuộc*** $(a;b)$.
- Hàm số $f(x)$ ***nghịch biến*** trên $(a;b) \Leftrightarrow f'(x)\leq 0, \forall x\in(a;b)$ và phương trình $f'(x)=0$ có ***hữu hạn nghiệm thuộc*** $(a;b)$.

❖ **Định lí 3: (Điều kiện cần và đủ để hàm số đơn điệu trên K)**

- Nếu hàm $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ và $f(x)$ liên tục trên nửa đoạn $[a;b)$ thì $f(x)$ sẽ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên nửa đoạn $[a;b)$.
- Nếu hàm $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ và $f(x)$ liên tục trên nửa đoạn $(a;b]$ thì $f(x)$ sẽ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên nửa đoạn $(a;b]$.
- Nếu hàm $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ và $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $f(x)$ sẽ đồng biến(hoặc nghịch biến) trên đoạn $[a;b]$.

2.1.3 Cực trị của hàm số.

Định nghĩa: Giả sử hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập hợp $D, (D\subset \mathbb{R})$ và $x_o \in D$.

❖ x_0 được gọi là một ***điểm cực đại*** của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a,b)\subset D$ và $f(x)<f(x_0)$ với $\forall x\in(a;b)$ và $x\neq x_0$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là ***giá trị cực đại*** của hàm số $f(x)$.

❖ x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a,b)\subset D$ và $f(x)>f(x_0)$ với $\forall x\in(a;b)\setminus\{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ **được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số** $f(x)$.

Điểm cực đại, cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.

Các định lý:

❖ ***Định lý 1 (điều kiện cần)***: Giả sử hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0)=0$.

Lưu ý: *Điều ngược lại của định lý 1 không đúng. Đạo hàm f' có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0 ví dụ như hàm $y = x^3$ hoặc hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm ví dụ như hàm $y = |x|$.*

❖ ***Định lý 2 (Quy tắc 1 - Điều kiện đủ)***: Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó.

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ tại x_0 thì f đạt cực đại tại x_0.

x	a	x_o	b
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗	Giá trị cực đại	↘

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ tại x_0 thì f đạt cực tiểu tại x_0

Do đó f đạt cực trị tại $x_0 \Leftrightarrow f'(x)$ đổi dấu tại x_0.

x	a	x_o	b
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	Giá trị cực tiểu	↗

Chú ý: $f'(x_o)$ có thể tồn tại hoặc không tồn tại.

❖ *Định lý 3 (Quy tắc 2 - Điều kiện đủ)*: Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và f có đạo hàm cấp 2 khác 0 tại điểm x_0.

- Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.
- Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

2.1.4: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Định nghĩa:

- *Số M gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN)** của $f(x)$ trên miền xác định D:*

$$M = \max_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_o \in D : f(x_o) = M \end{cases}$$

- *Số m gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của $f(x)$ trên miền xác định D:*

$$m = \min_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_o \in D : f(x_o) = m \end{cases}$$

*Định lý về sự tồn tại GTLN – GTNN: "**Nếu hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó**".*

Một số lưu ý:

- Khi nói đến *GTLN*, *GTNN* của hàm số f mà không chỉ rõ *GTLN*, *GTNN* trên tập nào thì ta hiểu là *GTLN*, *GTNN* trên tập xác định của f.
- Nếu hàm số f đồng biến trên $[a;b] \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(a) \\ \max\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(b) \end{cases}$
- Nếu hàm số f nghịch biến trên $[a;b] \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(b) \\ \max\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(a) \end{cases}$

■ **Phương pháp GTLN – GTNN của $y = f(x)$ bằng đạo hàm trên đoạn $D = [a;b]$**

Bước 1: Tính đạo hàm $f'(x)$.

Bước 2: Tìm các điểm tới hạn (nếu có) $x_i \in (a;b), i = \overline{1,n}$ sao cho $f'(x_i) = 0$ (hoặc không có đạo hàm).

Bước 3: Tính $\begin{cases} f'(x_i) = ? \\ f(a) = ? \\ f(b) = ? \end{cases}$

Bước 4: So sánh và kết luận $\begin{cases} \max\limits_{D} f(x) = \max\{f(x_1); f(x_2); ...; f(x_n); f(a); f(b)\} \\ \min\limits_{D} f(x) = \min\{f(x_1); f(x_2); ...; f(x_n); f(a); f(b)\} \end{cases}$

Lưu ý:

- Trường hợp tập $D = (a;b)$ (hoặc $D = (a;b]; D = (a;b]$) thì ta làm tương tự như bước 1 và bước 2. Đến bước 3 thì ta "lập bảng biến thiên" để từ đó đưa ra kết luận.
- Ngoài cách sử dụng đạo hàm như đã trình bày ở trên, đôi khi để giải quyết nhanh bài toán ta có thể ***sử dụng thêm các kiến thức về cực trị của hàm số bậc hai hay các bất đẳng thức đã học có thể kể đến như:***

► **Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (AM - GM).**

Cho n số không âm: $a_1, a_2, ..., a_n$. Khi đó ta có: $\boxed{\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

► **Bất đẳng thức Bunyakovsky.**

Cho hai bộ n số: $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n$ khi đó ta có bất đẳng thức:

$$\boxed{(a_1.b_1 + a_2.b_2 + ... + a_n.b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$ với quy ước nếu một số $b_i (i = \overline{1,n})$ nào đó bằng 0 thì tương ứng a_i bằng 0.

► **Bất đẳng thức tam giác.**

Với ba điểm bất kì A, B, C ta luôn có:

$\boxed{AB + AC \geq BC}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A nằm giữa B và C. (*Tổng độ dài hai cạnh bất kì trong một tam giác luôn lớn hơn hoặc bằng cạnh thứ ba*).

$\boxed{|AB - AC| \leq BC}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A nằm trên đường thẳng BC và nằm ngoài đoạn BC. (*Hiệu độ dài hai cạnh bất kì trong một tam giác luôn nhỏ hơn hoặc bằng cạnh thứ ba*).

Tổng quát: trong tất cả các đường gấp khúc nối 2 điểm A, B cho trước thì đoạn thẳng AB có độ dài nhỏ nhất.

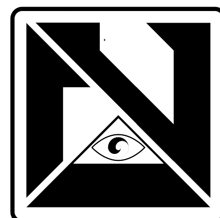
▶ **Bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai.**

Các bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai được sử dụng dưới dạng:

$\boxed{A^2 \geq 0 \text{ hay } -A^2 \leq 0}$

Do đó với m là hằng số, ta có: $\boxed{\begin{cases} f = A^2 + m \geq m \Rightarrow \min f = m \Leftrightarrow A = 0 \\ f = -A^2 + M \leq M \Rightarrow \max f = M \Leftrightarrow A = 0 \end{cases}}$

▶ **Dựa vào cực trị của hàm số bậc 2:** $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$



Nếu $a > 0 \Rightarrow y_{min} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ khi $x = \frac{-b}{2a}$

Nếu $a < 0 \Rightarrow y_{max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ khi $x = \frac{-b}{2a}$

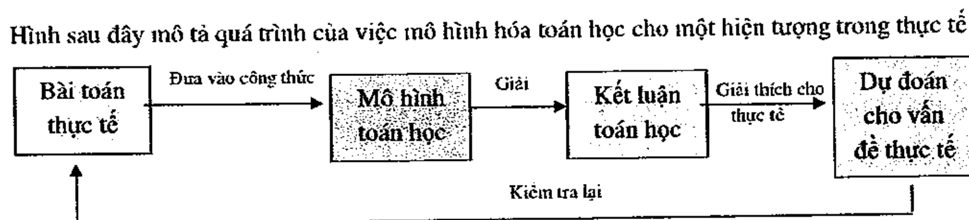
PHẦN 1.2: CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM TRONG THỰC TẾ

Qua tìm hiểu, tổng hợp và phân tích, tác giả nhận thấy các bài toán thực tế liên quan đến việc sử dụng đạo hàm có thể chia thành 2 phần lớn:

***Một là**, các bài toán thực tế đã được **mô hình hóa bằng một hàm số toán học**. Qua các ví dụ minh họa sau đây, tác giả sẽ chỉ ra cho bạn đọc những dạng toán thường gặp là gì? Các lĩnh vực khoa học khác đã ứng dụng đạo hàm như thế nào trong việc giải quyết bài toán mà họ đã đặt ra?*

***Hai là**, các bài toán thực tế mà **mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học**. Như chúng ta biết, để có thể ứng dụng đạo của hàm số thì trước tiên ta phải "thiết lập được hàm số". Như vậy ta có thể mô tả quy trình mô hình hóa dưới đây*

Hình sau đây mô tả quá trình của việc mô hình hóa toán học cho một hiện tượng trong thực tế



Ta có thể cụ thể hóa 3 bước của quá trình mô hình hóa như sau:

Bước 1: ***Dựa trên các giả thiết và yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình Toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả "dưới dạng ngôn ngữ Toán học"*** *cho mô hình mô phỏng thực tiễn. Lưu ý là ứng với vấn đề được xem xét có thể có nhiều mô hình toán học khác*

nhau, tùy theo các yếu tố nào của hệ thống và mối liên hệ giữa chúng được xem là quan trọng ta đi đến việc ***biểu diễn chúng dưới dạng các biến số, tìm các điều kiện tồn tại của chúng cũng như sự ràng buộc, liên hệ với các giả thiết của đề bài.***

Bước 2: *Dựa vào các kiến thức liên quan đến vấn đề thực tế như trong kinh tế, đời sống, trong khoa học kỹ thuật như Vật lý, Hóa học, Sinh học,...* ***Ta thiết lập hoàn chỉnh hàm số phụ thuộc theo một biến*** *hoặc nhiều biến. (Ở đây trong nội dung đang xét ta chỉ xét với tình huống 1 biến).*

Bước 3: ***Sử dụng công cụ đạo hàm*** *của hàm số để khảo sát và giải quyết bài toán hình thành ở bước 2. Lưu ý các điều kiện ràng buộc của biến số và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.*

Sau đây để bạn đọc hiểu rõ hơn, tác giả sẽ lấy các ví dụ minh họa được trình bày theo các chủ đề ứng dụng đạo hàm:

- ***Trong Hình học (bài toán 1 đến bài toán 11).***
- ***Trong Vật lý (bài toán 12 đến bài toán 17).***
- ***Trong Kinh tế (bài toán 18 đến bài toán 21).***
- ***Trong Đời sống và các lĩnh vực khác (bài toán 22 đến bài toán 28).***

Bài toán 1: Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước là $a \times b$ với $a < b$. Người ta cắt bỏ 4 hình vuông bằng nhau ở 4 góc rồi gò thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Hỏi cạnh của hình vuông cắt đi phải bằng bao nhiêu để hình hộp đó có thể tích lớn nhất?

■ **Phân tích:**

- *Trước tiên, với câu hỏi của bài toán thì ta nên đặt* x *chính là cạnh của hình vuông cắt đi. Như vậy ta cần tìm điều kiện giới hạn của biến số* x. *Do khi đó 1 cạnh của tấm nhôm sau khi bị cắt trở thành* $a - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{a}{2}$ *nên ta có* $0 < x < \frac{a}{2}$.



- *Và đồng thời ta cũng có được cạnh của tấm nhôm còn lại là* $b - 2x > 0$. *Đến đây ta cần thiết lập công thức tính thể tích khối hộp* $V = x(a-2x)(b-2x)$

- *Bài toán trở thành tìm* $\max\limits_{x \in \left(0;\frac{a}{2}\right)} V(x) = ?$. *Mời bạn đọc xem lời giải!*

Hướng dẫn giải.

- Gọi x là cạnh của hình vuông cắt đi, ta phải có điều kiện $0 < x < \frac{a}{2}$.

  Khi đó thể tích hình hộp là $V = x(a-2x)(b-2x) = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + abx = V(x)$.

- Bài toán trở thành tìm $\max\limits_{x \in \left(0;\frac{a}{2}\right)} V(x) = ?$

Đạo hàm $V' = f'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$.

Ta có $\Delta' = 4(a+b)^2 - 12ab = 4(a^2 - ab + b^2) > 0$ **với mọi** a, b.

Do đó $V' = 0$ **luôn có hai nghiệm phân biệt**

$x_1 = \dfrac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} < x_2 = \dfrac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$.

Theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{a+b}{3} > 0 \\ x_1 x_2 = \dfrac{ab}{12} > 0 \end{cases}$

suy ra $0 < x_1 < x_2$.

Hơn nữa, ta có $V'\left(\dfrac{a}{2}\right) = f'\left(\dfrac{a}{2}\right) = a^2 - ab = a(a-b) < 0$. Do đó $0 < x_1 < \dfrac{a}{2} < x_2$.

Bảng biến thiên

x	0		x_1		$\dfrac{a}{2}$
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	max	↘	

- Dựa vào bảng biến thiên ta thấy V đạt giá trị lớn nhất khi

$$x = x_1 = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$

■ **Bình luận:** *Qua bài toán này ta cần lưu ý:*

Một là, khâu tìm điều kiện cho biến cần đặt là cực kì quan trọng. Chúng ta không nên chỉ ghi $x > 0$ theo cách hiểu số đo đại số là một số dương.

Hai là, nếu không thuộc công thức tính thể tích khối hộp xem như bài toán này không thể giải quyết được. Điều này đòi hỏi học sinh phải biết cách vận dụng các kiến thức đã học vào bài toán thực tế.

Ba là, việc giải tìm nghiệm phương trình $V'(x) = 0$ cũng như lập bảng biến thiên của $V(x)$ không hề đơn giản, đòi hỏi học sinh phải có kỹ năng tốt trong biến đổi đại số.

Bài tập tương tự 1: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng 12 cm và chiều rộng bằng 10 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$; rồi gập tấm nhôm như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được thể tích lớn nhất.

A. $x = \dfrac{10+2\sqrt{7}}{3}$ B. $x = \dfrac{11+\sqrt{31}}{3}$ C. $x = \dfrac{11-\sqrt{31}}{3}$ D. $x = \dfrac{10-2\sqrt{7}}{3}$

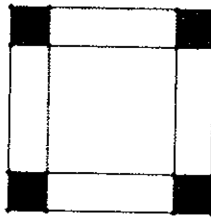
(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Xuân Nguyên, Thanh Hóa, 2016)

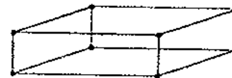
Hướng dẫn giải

Áp dụng kết quả của câu trên ta có $x = \dfrac{12+10-\sqrt{10^2-10.12+12^2}}{6} = \dfrac{11-\sqrt{31}}{3}$

Đáp án C.

Bài tập tương tự 2: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được thể tích lớn nhất.





A. $x = 6$ B. $x = 3$ C. $x = 2$ D. $x = 4$

(Trích đề minh họa THPT Quốc gia, 2016)

Hướng dẫn giải

Tương tự bài toán 1, khi tấm nhôm có dạng hình chữ nhật trở thành hình vuông thì ta có $x = \dfrac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} \xrightarrow{a=b} x = \dfrac{a}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$ cm. **Đáp án C.**

Bình luận: *Ngoài các giải dùng "công thức giải nhanh" đã thiết lập. Ta thấy rằng còn có thể xét các trường hợp của đáp án để tìm lại số đo các kích thước hình hộp, từ đó tính thể tích so sánh và tìm ra kết quả.*

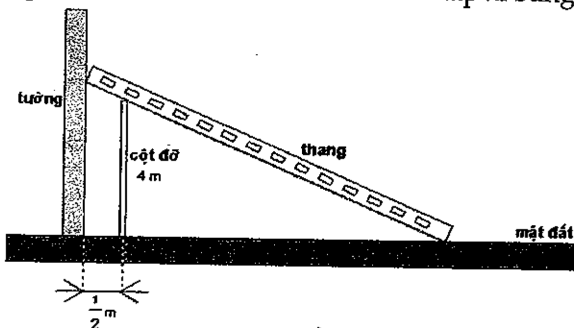
Bài toán 2. Tìm chiều dài bé nhất của cái thang để nó có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ cao 4 m, song song và cách tường 0,5m kể từ gốc của cột đỡ.

A. Xấp xỉ bằng $5{,}4902\ m$.

B. Xấp xỉ bằng $5{,}602\ m$.

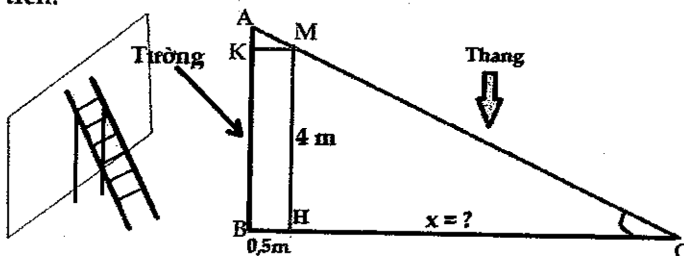
C. Xấp xỉ bằng $5{,}5902\ m$.

C. Xấp xỉ bằng $6{,}5902\ m$.



(trích đề thi thử THPT Hàn Thuyên, Bắc Ninh, 2016)

■ **Phân tích:**



• *Trước tiên, ta có thể minh họa mô hình trên bằng hình vẽ sau. Để xác định được độ dài ngắn nhất của* AC *thì ta thử suy nghĩ xem nên phân tích độ dài AC theo hướng nào? Để từ đó định hướng cách đặt ẩn thích hợp. Đối với hình vẽ trên và các quan hệ về cạnh, ta nhận thấy có 2 hướng phân tích tốt là:* ***hướng thứ nhất*** *là phân tích* $AC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$ và ***hướng thứ hai*** là $AC = AM + MC$

• *Nếu phân tích theo hướng thứ nhất, ta có thể thử đặt* $\mathrm{HC} = \mathrm{x} > 0$*, đến đây chỉ cần tính được* AB *theo* x *là đã có thể lập được hàm số* $f(x)$ *biểu diễn độ dài* AC*. Nhưng bằng cách nào đây?* $\xrightarrow{\mathrm{MH}=4}$ *Ta sử dụng đến quan hệ tỉ lệ trong định lý Thales thuận (MH // AB) nên ta có:* $\dfrac{HC}{BC} = \dfrac{MH}{AB} = \dfrac{x}{x+0,5}$*. Bài toán trở thành tìm* $\min f(x) = ?$

• ***Nếu phân tích theo hướng thứ hai,*** *nếu ta đặt* $\mathrm{HC} = \mathrm{x} > 0$ *thì khi đó ta sẽ biểu diễn độ dài* $AC = \sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)}$ *(việc khảo sát hàm này không đơn giản chút nào). Do đó ta chuyển hướng sang tìm quan hệ giữa góc và cạnh tam giác và nhận thấy* $\alpha = \measuredangle MCH = \measuredangle AMK$*. Đến đây ta thấy hướng phân tích tiếp là hoàn toàn thuận lợi vì khi đó* $MC = MH \sin\alpha$ *và* $AM = MK\cos\alpha$*.* ***Khi đó bài toán trở thành tìm*** $\min g(\alpha) = ?$

Hướng dẫn giải.

• **Đặt** $HC = x > 0 \Rightarrow BC = x + 0,5$**. Theo định lý Thales ta có** $\dfrac{HC}{BC} = \dfrac{MH}{AB} = \dfrac{x}{x+0,5}$

Do đó ta có $AB = \dfrac{4(x+0,5)}{x}$.

Do ΔABC **vuông tại** $B \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = (x+0,5)^2 + \dfrac{16(x+0,5)^2}{x^2}$

• Hay $AC^2 = \dfrac{(x+0,5)^2(x^2+16)}{x^2}$. Đặt $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + \frac{65}{4}x^2 + 16x + 4}{x^2} \ (x > 0)$.

Bài toán trở thành tìm $\min f(x) = ?$ với $x > 0$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{\left(4x^3 + 3x^2 + \frac{65}{2}x + 16\right)x^2 - 2x\left(x^4 + x^3 + \frac{65}{4}x^2 + 16x + 4\right)}{x^4}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2x^4 + x^3 - 16x - 8}{x^3}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x+1)(x^2+2x+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 > 0 \\ x = -\frac{1}{2} < 0 \ (loai) \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta có:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	$f(2)$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{x>0} f(x) = f(2) = \frac{125}{4}$

Do đó ta có $\min AC = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \approx 5,5902$. **Đáp án C**

Cách khác: Đặt $x = \measuredangle ACB \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó ta có $AC = AM + MC = \frac{KM}{\cos x} + \frac{MH}{\sin x} = \frac{1}{2\cos x} + \frac{4}{\sin x}$

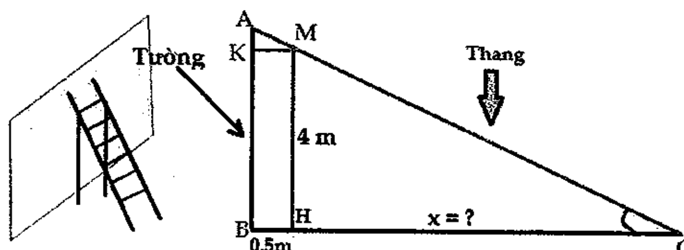
Đặt $g(x) = \frac{1}{2\cos x} + \frac{4}{\sin x}$. Bài toán trở thành tìm $\min_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} g(x) = ?$

$g'(x) = \frac{-8\cos^3 x + \sin^3 x}{2\sin^2 x \cos^2 x}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 2 \Leftrightarrow x_o = \arctan(2) \approx 63^0 26' 6''$

Lập bảng biến ta suy ra $AC_{min} \Leftrightarrow \min_{x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)} g(x) = g(x_o) \approx 5,5902$ (mét). Đáp án C.

■ **Bình luận:** *Qua bài toán này ta cần lưu ý:*

***Một là**, quả thật dù giải theo cách nào, ta cũng gặp phải một số khó khăn nhất định khi giải tìm nghiệm của phương trình* $f'(x) = 0$ hay $g'(x) = 0$. *Dựa theo cách thi trắc nghiệm ta có thể thử 4 phương án từ đáp án để tìm nghiệm (bằng chức năng CALC của máy tính cầm tay) sau đó kiểm tra qua* $f'(x) = 0$ hay $g'(x) = 0$



***Hai là**, ngoài việc sử dụng "ứng dụng đạo hàm" để tìm GTLN – GTNN của hàm số này, ta cũng có thể vận dụng bất đẳng thức. Giả sử đặt* $AB = b, BC = a\left(b > 0, a > \frac{1}{2}\right)$

Dựng hệ trục Bxy $(BC \subset Bx, BA \subset By)$. *Ta có:* $AC: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Khi đó $M\left(\frac{1}{2}; 4\right) \in AC \Rightarrow \frac{1}{2a} + \frac{4}{b} = 1$

Bài toán trở thành tìm $\min AC^2 = \min(a^2 + b^2)$ thỏa $\frac{1}{2a} + \frac{4}{b} = 1, a > \frac{1}{2}, b > 4$

(việc giải tiếp xin dành cho bạn đọc!)

***Ba là**, ta có:* $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + \frac{65}{4}x^2 + 16x + 4}{x^2} = \left(x^2 + \frac{16}{x}\right) + \left(x + \frac{4}{x^2}\right) + \frac{65}{4}$

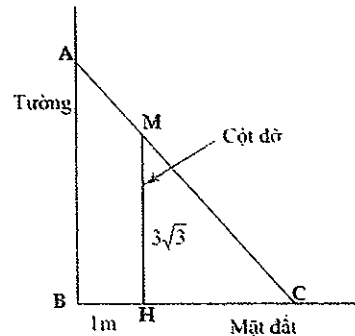
$$\Rightarrow f(x)=\underbrace{x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}}_{\geq 3\sqrt[3]{8^2}}+\underbrace{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{4}{x^2}}_{\geq 3}+\frac{65}{4}\overset{Cauchy}{\geq} 3.4+3+\frac{65}{4}=\frac{125}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=2$

Bài tập tương tự: Tìm chiều dài L bé nhất của cái thang để có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ có chiều cao $3\sqrt{3}$ m và cách tường 1m kể từ tim cột đỡ.

A. $L=5$. B. $L=8\sqrt{2}$ C. $L=\frac{7}{2}$. D. $L=8$.

Hướng dẫn giải



Đặt $x=\measuredangle ACB\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó ta có

$$AC=AM+MC=\frac{BH}{\cos x}+\frac{MH}{\sin x}=\frac{1}{\cos x}+\frac{3\sqrt{3}}{\sin x}$$

Đặt $g(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{3\sqrt{3}}{\sin x}$.

Bài toán trở thành tìm $\min\limits_{x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} g(x)=?$

$$g'(x)=\frac{\sin^3 x-3\sqrt{3}\cos^3 x}{\cos^2 x\sin^2 x}, g'(x)=0\Leftrightarrow \tan x=\sqrt{3}\Leftrightarrow \tan x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x_o=\frac{\pi}{3}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

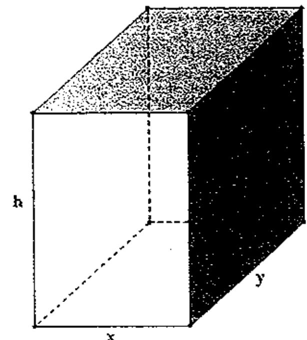
Lập bảng biến thiên , ta có:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	8	↗	

$$AC_{min}\Leftrightarrow \min_{x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} g(x)=g\left(\frac{\pi}{3}\right)=8\text{ (mét)}.$$ **Đáp án A**

Bài toán 5: Cần phải xây dựng một hố ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích V (m^3) không đổi, hệ số $k>0$ cho trước (k là tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy). Hãy xác định các kích thước của đáy để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

■ **Phân tích:**



- *Với thể tích V cho trước và quan hệ giữa chiều rộng của đáy và chiều cao của hình hộp ta hoàn toàn có thể biểu diễn được độ dài chiều dài theo 1 biến.*
- *Như vậy ta cần hiểu yêu cầu bài toán "tiết kiệm nguyên vật liệu nhất là gì?" Đó chính là làm sao cho phần bao phủ bên ngoài hình hộp có diện tích nhỏ nhất hay diện tích toàn phần của khối hộp nhỏ nhất.*

Hướng dẫn giải.

- Gọi $x, y\ (0 < x < y)$ lần lượt là chiều rộng và chiều dài của đáy hố ga.

  Gọi h là chiều cao của hố ga $(h > 0)$.

- Theo đề bài ta có $h = kx$ và $V = hxy \Rightarrow y = \frac{V}{hx} = \frac{V}{kx^2}$

Để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất ta cần tìm các kích thước sao cho diện tích toàn phần của hố ga là nhỏ nhất.

Khi đó ta có: $S_{tp} = 2xh + 2yh + 2xy = 2x(kx) + 2(kx).\frac{V}{kx^2} + 2x\frac{V}{kx^2}$

Suy ra $S_{tp} = 2kx^2 + \frac{2\left(\frac{k+1}{k}\right)V}{x}$. Xét hàm số $f(x) = 2kx^2 + \frac{2\left(\frac{k+1}{k}\right)V}{x}$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ với $x > 0$.

$f'(x) = 4kx - \frac{2\left(\frac{k+1}{k}\right)V}{x^2} = 2\frac{2k^2x^3 - (k+1)V}{kx^2}$, cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_o = \sqrt[3]{\frac{(k+1)V}{2k^2}} > 0$

Lập bảng biến thiên ta có

x	0		x_o		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_o)$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{x>0} f(x) = f\left(\sqrt[3]{\frac{(k+1)V}{2k^2}}\right)$.

Khi đó $y = \sqrt[3]{\frac{4kV}{(k+1)^2}}$ và $h = \sqrt[3]{\frac{k(k+1)V}{2}}$.

■ **Bình luận:** *Qua bài toán này ta cần lưu ý:*

Một là, ta có thể sử dụng bất đẳng thức để tìm $\min S_{tp}$

$$S_{tp} = 2kx^2 + \frac{2\left(\frac{k+1}{k}\right)V}{x} = 2kx^2 + \frac{\left(\frac{k+1}{k}\right)V}{x} + \frac{\left(\frac{k+1}{k}\right)V}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2(k+1)V^2}{k}}.$$

Khi đó dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $2kx^2 = \frac{\left(\frac{k+1}{k}\right)V}{x} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{(k+1)V}{2k^2}}$

Hai là, từ ba kích thước cho trước thỏa yêu cầu bài toán trên ta đi đến quan hệ tỉ lệ giữa chúng là $\begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{(k+1)V}{2k^2}} \\ y = \sqrt[3]{\frac{4kV}{(k+1)^2}} \\ h = \sqrt[3]{\frac{k(k+1)V}{2}} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2kx}{k+1} = \frac{2h}{k+1}$

Ba là, cũng từ bài toán này nếu giữ nguyên giả thiết $V = \text{const}$ *và thay thế* $y = kx$ *hay* $h = ky$ *(k là tỉ số giữa các kích thước của hình hộp) thì liệu rằng bài toán có thay đổi? Câu trả lời là kết quả vẫn tương tự như khi ta khảo sát với* $h = kx$. *Do đó*

Nếu $\begin{cases} V = \text{const} \\ y = kx, k > 0 \end{cases} \xrightarrow{x,y,h=?} \min S_{tp} = ? \Leftrightarrow h = \dfrac{2kx}{k+1} = \dfrac{2y}{k+1}$

Nếu $\begin{cases} V = \text{const} \\ h = ky, k > 0 \end{cases} \xrightarrow{x,y,h=?} \min S_{tp} = ? \Leftrightarrow x = \dfrac{2ky}{k+1} = \dfrac{2h}{k+1}$

Bài tập tương tự 1: Cần phải xây dựng một hố ga có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $V\left(m^3\right)$, có chiều cao gấp 3 lần chiều rộng của cạnh đáy. Hãy xác định các kích thước của đáy để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

Hướng dẫn giải

Gọi x, y, h lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của hình hộp

Dựa vào bài toán 3, ta có: $\begin{cases} V = hxy \\ h = 3x, k > 0 \end{cases} \xrightarrow{x,y,h=?} \min S_{tp} = ? \Leftrightarrow \boxed{y = \dfrac{6x}{4} = \dfrac{2h}{4}}$

Như vậy khi đó chiều cao sẽ gấp lần 2 chiều dài khối hộp.

Bài tập tương tự 2: Khi xây nhà, chủ nhà cần làm một hồ nước bằng gạch và xi măng có dạng hình hộp đứng đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng và không nắp, có chiều cao là h và có thể tích là 18 m^3. Hãy tính chiều cao h của hồ nước sao cho chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $h = 1\,m$ B. $h = 2\,m$ C. $h = \dfrac{3}{2}\,m$ D. $h = \dfrac{5}{2}\,m$

(Trích đề thi thử THPT Thanh Miện, Hải Dương, 2016)

Hướng dẫn giải

Gọi x, y, h lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của hình hộp

- Theo đề bài ta có $y = 3x$ và $V = hxy \Rightarrow h = \dfrac{V}{xy} = \dfrac{V}{3x^2}$

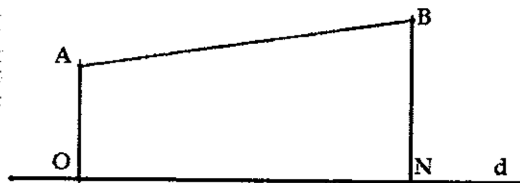
Để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất ta cần tìm các kích thước sao cho diện tích toàn phần của hố ga là nhỏ nhất.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{4V}{3x} = 3x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{9}} = 2 \Rightarrow h = \dfrac{V}{3x^2} = \dfrac{3}{2}$. **Đáp án C.**

■ **Bình luận:** *So với bài toán 3, bài toán này chỉ có 1 điểm khác biệt chính là đáy "không nắp". Bạn đọc có thể tổng quát bài toán lên thành* $\begin{cases} y = kx, k > 0 \\ V = \text{const} \end{cases} \xrightarrow{x,y,h=?} \min S$

Bài toán 4. Có hai vị trí A, B nằm về cùng phía đối với bờ sông (d) như hình vẽ. Khoảng cách từ A đến bờ sông là $30m$. Khoảng cách từ B đến bờ sông là $45m$. Khoảng cách giữa A và B là $5\sqrt{409}\ m$.

Một người đi từ A đến bờ sông (phía A, B) để lấy nước sau đó đi về vị trí B. Hỏi đoạn đường tối thiểu người đó đi từ A đến B (có ghé qua bờ sông) là bao nhiêu (đơn vị m)?



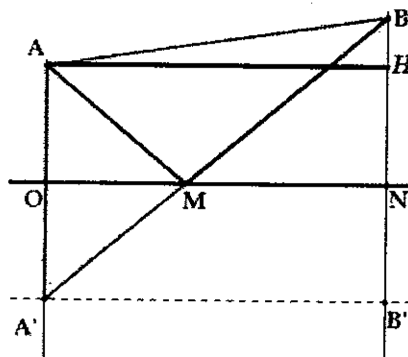
(Bài toán từ tác giả Hứa Lâm Phong, 2016)

■ **Phân tích:**

- *Gọi M là điểm nằm trên cạnh ON (vị trí để từ A đến để lấy nước từ bờ sông. Khi đó ta cần xác định M sao cho* $(AM+MB)_{min}$

- *Do đề bài đã cho độ dài* AB, AO, BN *nên ta có thể mô tả độ dài cạnh* AM *theo* OM *(pytago trong tam giác* ΔAOM*). Tuy nhiên để biểu diễn độ dài cạnh* BM *theo độ dài* OM *thì ta cần biểu diễn* MN *theo* OM. *Điều này dẫn đến việc cần phải tính độ dài* $ON=?$

$\longrightarrow ON = d(A;BN) = \sqrt{AB^2-(BN-HN)^2}$



- *Đến đây ta nhận thấy biểu thức* $S = AM + MB = \sqrt{OA^2+OM^2} + \sqrt{MN^2+NB^2}$

$$\Rightarrow S = \underbrace{\sqrt{x^2+30^2}+\sqrt{(100-x)^2+45^2}}_{f(x)} \text{ (với } x = OM \text{ và } 0<x<ON\text{)}$$

Bài toán trở thành tìm $\min\limits_{x\in(0;ON)} f(x) = ?$

Hướng dẫn giải.

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BN.

Dựa vào hình vẽ ta có $ON = AH = \sqrt{AB^2-(BN-HN)^2} = 100$

Gọi M là vị trí mà người đó đi từ A đến bờ sông, đặt $OA = x(m)$, $(0<x<100)$

Khi đó ta có đoạn đường tối thiểu mà người đó phải đi là:

$S = AM + MB = \sqrt{OA^2+OM^2} + \sqrt{MN^2+MB^2} \Rightarrow S = \sqrt{x^2+30^2}+\sqrt{(100-x)^2+45^2}$

Đặt $f(x) = \sqrt{x^2+30^2}+\sqrt{(100-x)^2+45^2}$ với $(0<x<100)$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ với $0<x<100$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+30^2}} + \frac{-(100-x)}{\sqrt{12015-200x+x^2}}, f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=40(tm) \\ x=-200(ktm) \end{array}\right.$$

Khi đó lập bảng biến thiên ta có

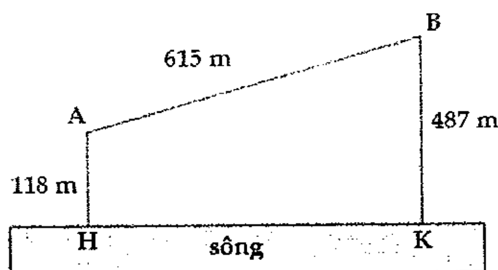
x	0		40		100
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖	↘	125	↗	‖

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $minS = \min\limits_{x\in(0;100)} f(x) = f(40) = 125\ m$

■ **Bình luận:** *Ngoài cách giải trên ta có thể sử dụng "bất đẳng thức tam giác" để giải như sau:* $AM + MB = MA' + MB \geq BA' \Rightarrow min(AM + MB) = BA' \Leftrightarrow A', M, B$ *thẳng hàng.*

Do đó $BA' = \sqrt{A'B'^2 + BB'^2} = \sqrt{100^2 + 75^2} = 125$

Bài tập tương tự 1*: Có hai vị trí A, B nằm về cùng phía đối với bờ sông (d) như hình vẽ. Khoảng cách từ A đến bờ sông là 118 m. Khoảng cách từ B đến bờ sông là 487 m. Khoảng cách giữa A và B là 615 m. Một người đi từ vị trí A đến bờ sông (phía A, B) để lấy nước sau đó đi về vị trí B. Hỏi đoạn đường tối thiểu người đó đi từ A đến B (có ghé qua bờ sông) là bao nhiêu? (đơn vị m)*



(Trích đề thi HSG giải toán trên máy tính cầm tay, Tây Ninh, 2006)

Hướng dẫn giải

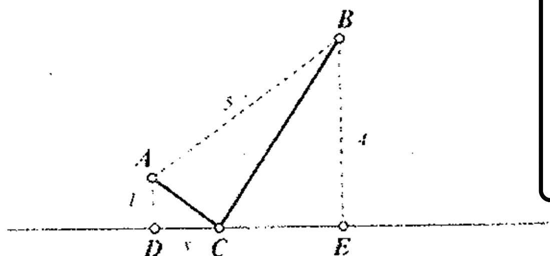
Gọi A', B' lần là điểm đối xứng của A và B qua (d).

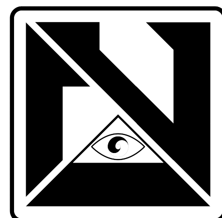
Gọi M là điểm thuộc cạnh HK. Khi đó ta có $\mathbf{AM + MB = MA' + MB \geq A'B}$

Do đó $\mathbf{(AM + MB)_{min} = A'B = \sqrt{BB'^2 + A'B'^2} = \sqrt{(BK + HA')^2 + AB^2 - (BK - AH)^2}}$

$\mathbf{\Rightarrow A'B = \sqrt{(487 + 118)^2 + 615^2 - (487 - 118)^2} = \sqrt{608089} \approx 779{,}800612\ m}$

Bài tập tương tự 2 (theo Thầy Lê Phúc Lữ): Có hai cây cột A và B dựng trên mặt đất lần lượt cao 1m và 4m, đỉnh của hai cây cột cách nhau 5m. Người ta cần chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa hai cây cột) để giăng nối đến hai đỉnh cột để trang trí như mô hình bên dưới. Tính độ dài ngắn nhất của sợi giây?





A. $\sqrt{41}\ m$. B. $\sqrt{37}\ m$. C. $\sqrt{29}\ m$. D. $3\sqrt{5}\ m$.

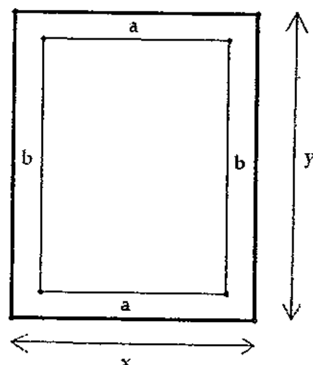
Hướng dẫn giải

Gọi A',B' lần lượt là điểm đối xứng của A và B qua cạnh DE.

Ta có $AC + CB = CA' + CB \geq BA' = \sqrt{BB'^2 + B'A'^2} = \sqrt{41}$

(việc tính toán cụ thể xin dành cho bạn đọc)

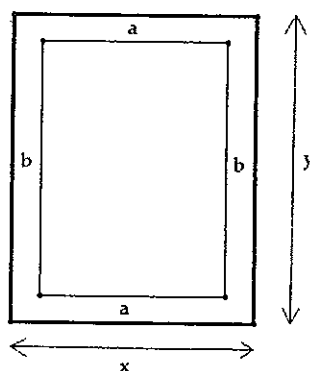
Bài toán 5. Có một cơ sở in sách xác định rằng: Diện tích của toàn bộ trang sách là $S\left(cm^2\right)$. Do yêu cầu kỹ thuật nên dòng đầu và dòng cuối đều phải cách mép (trên và dưới) trang sách là $a(cm)$. Lề bên trái và bên phải cũng phải cách mép trái và mép phải của trang sách là $b(cm)(b<a)$ được mô tả như hình vẽ. Các kích thước của trang sách là bao nhiêu để cho diện tích phần in các chữ có giá trị lớn nhất. Khi đó hãy xác định tỷ số các kích thước của trang sách.



■ **Phân tích:**

[redacted]

- *Qua hình vẽ mô tả, ta có thể tính phần diện tích in chữ như sau thông qua các cạnh đã trừ đi cách mép ngang và dọc. Vì vậy khi đó ta có:* $P = (x-2b)(y-2a)$ *kèm với giả thiết* $S = xy$ *, trong đó x, y lần lượt là chiều rộng và chiều dài của trang sách.*
- *Từ đây ta có thể* $x = \frac{S}{y}$ *hay* $y = \frac{S}{x}$ *để thay vào biểu thức P từ đó đưa đến việc tìm* $\max P(x)$ *hay* $\max P(y)$.



Hướng dẫn giải.

[redacted]

Và chiều dài phần in sách sẽ là $y-2a, \left(a<\frac{y}{2}\right)$

- Theo đề bài ta có: $P = (x-2b)(y-2a)$ (*)

Mặt khác, $S = xy \Rightarrow y = \frac{S}{x}$, thay vào (*) ta được $P = (x-2b)\left(\frac{S}{x} - 2a\right)$

Suy ra $P = S + 4ab - \left(2ax + \frac{2bS}{x}\right)$

- Đặt $f(x) = 2ax + \frac{2bS}{x}$ với $x > 0$. Ta nhận thấy $max\,P \Leftrightarrow min\,f(x)$

$f'(x) = 2a - \frac{2bS}{x^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{bS}{a}}$.

Và đồng thời $f''(x) = \frac{4bS}{x^2} > 0 \Rightarrow \min_{x\in(0;+\infty)} f(x) = f\left(\sqrt{\frac{bS}{a}}\right) = 4\sqrt{abS}$.

Khi đó $x = \sqrt{\frac{bS}{a}}, y = \sqrt{\frac{aS}{b}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{S}{x^2} = \frac{a}{b} > 1$

■ **Bình luận:** *trong thực tế ta thấy một số cơ sở in sách đã chọn khổ sách* 16x24, 20x30, *v,v...*

Khổ 16x24
Mép ngang cách: 2cm
Mép dọc cách: 3cm

Khổ 20x30
Mép ngang cách: 2cm
Mép dọc cách 3cm

Hai là, ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy

$f(x) = 2ax + \frac{2bS}{x} \geq 2\sqrt{2ax.\frac{2bS}{x}} = 4\sqrt{abS}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2ax = \frac{2bS}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{bS}{a}}$ *và* $y = \frac{S}{x} = \sqrt{\frac{aS}{b}}$

Do đó ta có $\frac{y}{x} = \frac{S}{x^2} = \frac{a}{b} > 1$.

Bài tập tương tự 1: Một trang chữ của cuốn sách giáo khoa cần diện tích $384\,cm^2$. Lề trên và dưới là 3cm. Lề trái và phải là 2cm. Để diện tích phần chữ in vào cuốn sách được nhiều nhất thì kích thước của trang giấy là

A. Dài $24cm$, rộng 16 cm. B. Dài $26cm$, rộng $14,77cm$.

C. Dài $25cm$, rộng $15,36cm$. D. Dài $25,6cm$, rộng $15cm$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng kết quả trên ta có $\frac{y}{x} = \frac{384}{x^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ x^2 = 256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 24 \end{cases}$ Đáp án A

Bài tập tương tự 2: Một trang chữ của cuốn sách giáo khoa cần diện tích $486\,cm^2$. Lề trên và dưới là 3cm. Lề trái và phải là 2cm. Để diện tích phần chữ in vào cuốn sách được nhiều nhất thì kích thước của trang giấy là:

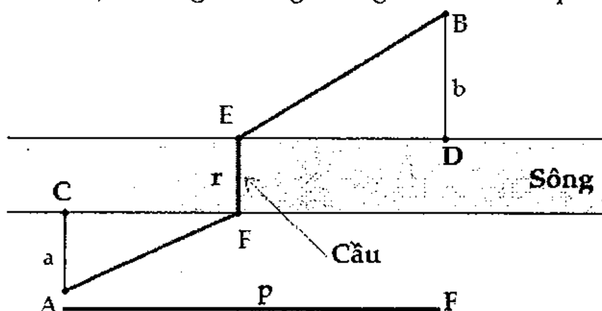
A. Rộng $18cm$, dài $27cm$. B. Rộng $19cm$, dài $25,57cm$.

C. Rộng $20cm$, rộng $24,3cm$. D. Rộng $17cm$, dài $28,59cm$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng kết quả trên, ta có $\frac{y}{x}=\frac{486}{x^2}=\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}3x=2y\\x^2=324\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=18\\y=27\end{cases}$. **Đáp án A.**

Bài toán 6. Một con đường được xây dựng giữa hai thành phố A và B. Hai thành phố này bị ngăn cách bởi một con sông có chiều rộng là $r(km)$. Người ta cần xây 1 cây cầu bắc qua sông, biết rằng A cách con sông một khoảng bằng $a(km)$, B cách con sông một khoảng bằng $b(km)$ $(0<a\le b)$ như hình vẽ. Hãy xác định vị trí xây cầu EF (theo hình vẽ) để tổng khoảng cách giữa hai thành phố là nhỏ nhất?



■ **Phân tích:**

[redacted]

- *Tổng khoảng cách lúc này sẽ là* $S=AF+EF+EB=\sqrt{x^2+a^2}+r+\sqrt{(p-x)^2+b^2}$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $S(x)$ ***với*** $0<x<p$

Hướng dẫn giải.

[redacted]

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $S(x)$ ***với*** $0<x<p$

Khi đó $S'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{x-p}{\sqrt{b^2+(p-x)^2}}$.

$S'(x)=0\Leftrightarrow x\sqrt{b^2+(p-x)^2}=(p-x)\sqrt{x^2+a^2}$

$\Leftrightarrow x^2\left[b^2+(p-x)^2\right]=(p-x)^2\left(x^2+a^2\right)\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)x^2-2a^2px+a^2p^2=0\ (*)$

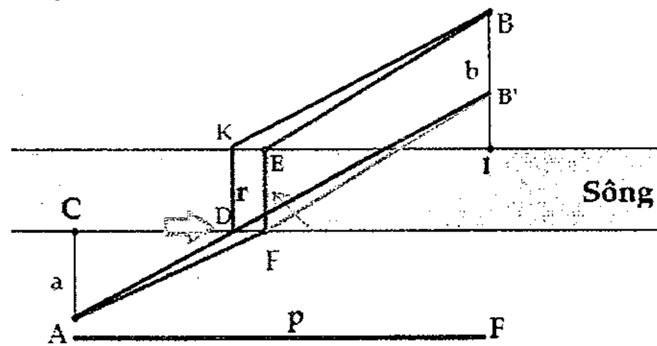
Xét $\Delta'=a^4p^2-a^2p^2\left(a^2-b^2\right)=a^2p^2b^2>0$

Do đó $pt(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{a^2p - apb}{a^2 - b^2} = \dfrac{ap}{a+b} \in (0;p) \\ x = \dfrac{a^2p + apb}{a^2 - b^2} = \dfrac{ap}{a-b} (ktm) \end{array} \right.$

[redacted]

Vậy để khoảng cách giữa hai thành phố là ngắn nhất thì $x = \dfrac{ap}{a+b}$

■ **Bình luận:** *Ta thấy rằng chiều dài r của cây cầu là đại lượng bất biến và vấn đề là chọn vị trí thuận lợi F hay vị trí thuận lợi E trong hình vẽ để tạo được quãng đường ngắn nhất. Dĩ nhiên ta cũng đặt ra câu hỏi liệu rằng còn cách khác nữa hay không?*



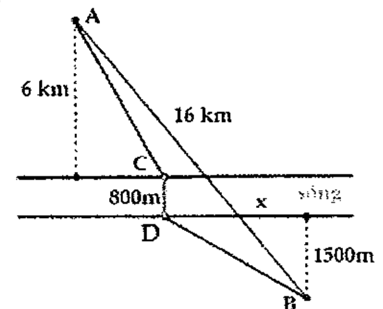
Gọi B' là ảnh của B qua phép tịnh tiến $\overline{EF}$. *Khi đó* $AB' \cap CF = D$

Với mọi vị trí đặt cây cầu EF ta luôn có:

$BE + EF + AF = B'F + DK + AF \geq DK + B'A = DK + B'D + DA = const$

Dấu "=" xảy ra khi $\Leftrightarrow F \equiv D$. *Khi đó* $S = B'A + EF = \sqrt{p^2 + (b+a)^2} + r$

Bài tập tương tự 1: Hai thành phố A và B nằm ở hai phía khác nhau của một con sông thẳng, lòng sông rộng 800m, thành phố A ở bên phía phải cách bờ 6km và cách thành phố B theo đường chim bay 16 km; thành phố B cách bờ trái 1.500m. Người ta muốn xây một cây cầu CD vuông góc với bờ sông sao cho quãng đường bộ từ A đến B (độ dài đường gấp khúc *ACDB*) là ngắn nhất. Tính độ dài quãng đường đó?



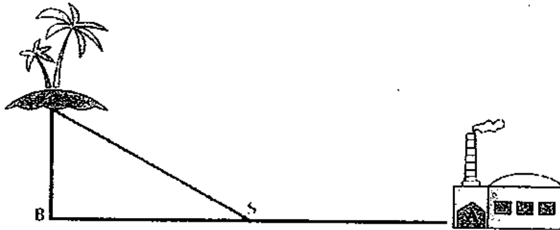
(Trích đề thi HSG giải toán trên máy tính cầm tay, Quảng Ninh, 2012)

Hướng dẫn giải

[redacted]

[redacted]

Bài tập tương tự 2: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo C và khoảng cách ngắn nhất từ B đến C là 1 km, khoảng cách từ B đến A là 4 km được minh họa bằng hình vẽ sau:



Biết rằng mỗi rằng km dây điện đặt dưới nước mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất?

A. $\frac{15}{4}km$ B. $\frac{13}{4}km$ C. $\frac{10}{4}km$ D. $\frac{19}{4}km$

Hướng dẫn giải

Gọi $x(km)$ là khoảng cách từ S đến tới điểm $B \Rightarrow SB = x(0 < x < 4\ km)$. Khi đó khoảng cách từ $SA = 4 - x(km) \Rightarrow SC = \sqrt{BC^2 + BS^2} = \sqrt{1+x^2}\ (km)$

[redacted]

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $C(x)$ với $0 < x < 4$

$$\Rightarrow C'(x) = -3000 + \frac{5000x}{\sqrt{1+x^2}} = 1000\left(\frac{5x - 3\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

[redacted]

Do đó $\min\limits_{x\in(0;4)} C(x) = C\left(\frac{3}{4}\right) = 16000$ (USD).

Vậy, để chi phí ít tốn kém nhất thì điểm S phải cách A là $AB - BS = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}km$

Bài toán 7. Giả sử bạn là chủ của một xưởng cơ khí vừa nhận được một đơn đặt hàng là thiết kế một bồn chứa nước hình trụ có nắp với dung tích 20 lít. Để tốn ít

nguyên vật liệu nhất, bạn sẽ chọn giá trị nào cho độ cao bồn nước trong các giá trị dưới đây?

A.0,3 mét. **B.** 0,4 mét. **C.** 0,5 mét. **D.** 0,6 mét.

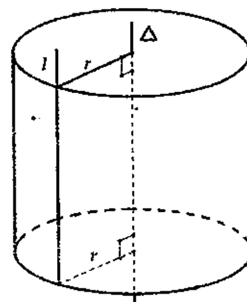
(Trích đề thi thử lần 4, Facebook: Group Toán 3K , 2016)

■ **Phân tích:**

- *Ta đặt ra 1 số câu hỏi định hướng như sau:*

  Một là, làm sao để tốn ít nguyên vật liệu nhất?

  Hai là, có thể tổng quát bài toán này lên không?



- *Ta nhận thấy để ít tốn nguyên vật liệu nhất thì diện tích xung quanh của phần vỏ bao bên ngoài bồn chứa nước cùng với diện tích của đáy và nắp phải nhỏ nhất. Hay chính xác hơn ta cần tìm diện tích xung quanh nhỏ nhất ứng với thể tích mà đề bài cho.*

[redacted]

- *Như vậy ta có thể tìm* $minS_{tp}$ *phụ thuộc theo 1 trong 2 biến r hoặc h. Và ta nhận thấy nên tổng quát bài toán này lên thành* $V = const$ *thay vì chỉ xét riêng lẻ trường hợp* $V = 20$ *(lít)*

Hướng dẫn giải.

- Gọi $r,h(r,h>0)$ lần lượt bán kính đáy và chiều cao của khối trụ. Khi đó ta có

  $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi r^2}$.

[redacted]

- Xét hàm số $f(r) = r^2 + \dfrac{V}{\pi r}$. Bài toán trở thành tìm $\min\limits_{r>0} f(r) = ?$

  Ta có: $f'(r) = 2r - \dfrac{V}{\pi r^2}, f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$.

  Lập bảng biến thiên, ta có:

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
$f'(r)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(r)$	‖	↘	$f\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$	↗	‖

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{r>0} f(r) = f\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)$.

Khi đó $h = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{4.20}{\pi}} \approx 2,94(dm) = 0,29m$. **Đáp án A**

■ *Bình luận:* ***ngoài cách sử dụng đạo hàm, ta có thể sử dụng*** *bất đẳng thức Cauchy*

$$S_{tp} = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{\pi r}\right) = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r}\right) \ge 2\pi.3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

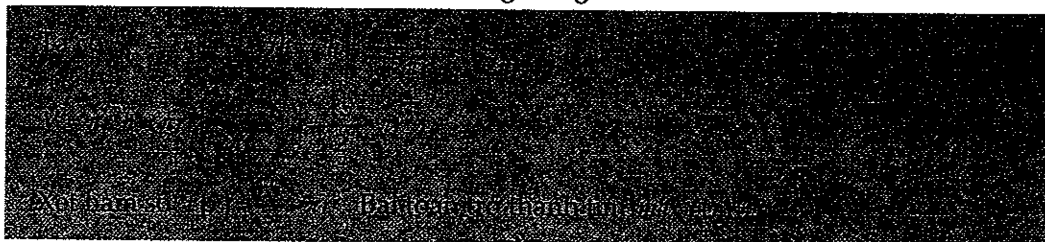
Thay $V = 20$ *vào ta được* $h \approx 2,94(dm) = 0,29(m)$. *Ta chọn* ***đáp án A.***

Đồng thời với việc tổng quát bài toán lên, ta nhận thấy, $\dfrac{h}{r} = \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}}{\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}} = 2 \Rightarrow h = 2r$.

Bài tập tương tự 1: Trong số các khối trụ có diện tích toàn phần bằng S, khối trụ có thể tích lớn nhất khi bán kính đáy r và đường cao h lần lượt thỏa mãn:

A. $r = h = \sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$. **B.** $r = h = \sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$. **C.** $r = h = \sqrt{\dfrac{S}{5\pi}}$. **D.** $r = h = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

Hướng dẫn giải


[redacted]

$f'(r) = \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2, f'(r) = 0 \Leftrightarrow r_o = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$

Lập bảng biến thiên, ta có:

x	0		r_o		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	‖	↗	1250	↘	‖


[redacted]

Bài tập tương tự 2: Bạn muốn xây dựng một bình chứa nước hình trụ có thể tích $150m^3$. Đáy làm bằng bêtông giá 100 nghìn VNĐ/m^2, thành làm bằng tôn giá 90 nghìn VNĐ/m^2, nắp bằng nhôm không gỉ giá 120 nghìn VNĐ/m^2. Vậy phải chọn kích thích bình như thế nào để chi phí xây dựng là thấp nhất?

Hướng dẫn giải

Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của bình chứa hình trụ $(r, h > 0)$.

Khi đó: $V = \pi r^2 h = 150m^3 \Rightarrow h = \dfrac{150}{\pi r^2}$

[redacted]

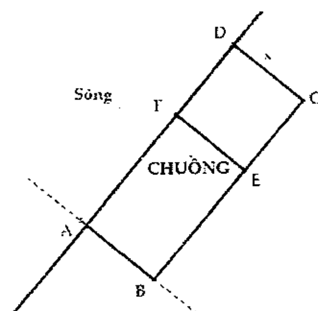
Ta có $P'(r) = 440\pi r - \dfrac{27000}{r^2}, P'(r) = 0 \Leftrightarrow r_o = \sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}$

Lập bảng biến thiên, ta được:

r	0		r_o		$+\infty$
$P'(r)$		$-$	0	$+$	
$P(r)$		↘	P_{min}	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}$ và $h = \dfrac{150}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}\right)^2}$.

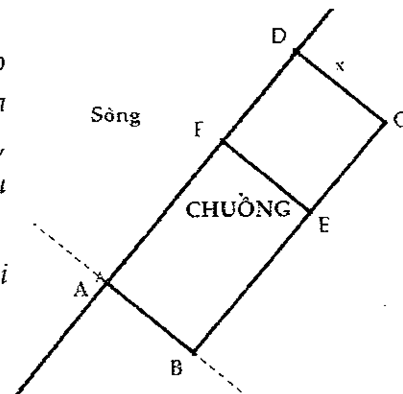
Bài toán 8. Một chủ trang trại nuôi gia cầm muốn rào thành 2 chuồng hình chữ nhật sát nhau và sát một con sông, một chuồng nuôi gà và một chuồng nuôi vịt. Biết rằng đã có sẵn 240 m hàng rào. Hỏi diện tích lớn nhất có thể bao quanh chuồng là bao nhiêu?



■ **Phân tích:**

- *Xét hình chữ nhật ABCD như hình vẽ. Ta cần rào cạnh AB, BC, CD, EF như hình vẽ. Việc đề bài cho ta 240 m rào tức là đã cho tổng chiều dài của 4 cạnh AB, BC, CD, EF hay* $3AB + BC = 240$ *với yêu cầu* $S_{max} = AB.BC$.
- *Như vậy nếu ta đặt* $AB = x > 0$ *thì khi đó độ dài cạnh BC sẽ là* $BC = 240 - 3x > 0$. *Và do đó*

$S = x(240 - 3x) = 240x - 3x^2$



Hướng dẫn giải.

- Xét hình chữ nhật $ABCD$ như hình vẽ, và đặt $AB = x$ $(x > 0)$.
- Khi đó $BC = 240 - 3x > 0 \Rightarrow x < 80$.
- Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là $S = x(240 - 3x) = 240x - 3x^2$

• ***Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ với*** $0 < x < 80$

Xét $f(x) = 240x - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 240 - 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$

Do $f''(x) = -6 < 0, \forall x \in (0;80)$.

Do đó $maxS = \max\limits_{x\in(0;80)} f(x) = f(40) = 4800 \Leftrightarrow x = 40$.

Vậy diện tích lớn nhất có thể bao quanh là $4.800m^2$.

■ **Bình luận:** *ta có thể biến đổi* $f(x) = 240x - 3x^2 = 4800 - 3(x-40)^2 \leq 4800$. ***Dấu "=" xảy ra khi*** $x = 40$.

Hoặc sử dụng bất đẳng thức Cauchy

$$f(x) = x(240 - 3x) = \frac{1}{3}3x(240 - 3x) \leq \frac{1}{3}\frac{(3x + 240 - 3x)^2}{4} = 4800$$

Dấu "=" xảy ra khi $3x = 240 - 3x \Leftrightarrow x = 40$.

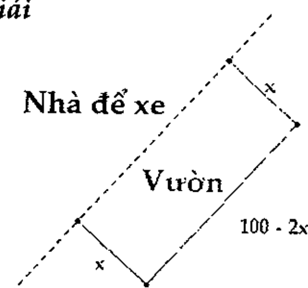
Bài tập tương tự 1: Một khu vườn hình chữ nhật được xây dựng bên cạnh một nhà để xe. Người làm vườn có hàng rào dài 100 m và dự định làm một hàng rào 3 cạnh: mặt bên của nhà để xe sẽ là cạnh thứ 4. Kích thước nào sẽ làm cho diện tích của khu vườn lớn nhất ?

Hướng dẫn giải

Gọi $x(m)$ là chiều rộng của cạnh hình chữ nhật như hình vẽ. $0 < x < 100$.

Khi đó chiều dài cạnh hình chữ nhật sẽ là $100 - 2x$

Diện tích hình chữ nhật $S = x(100 - 2x)$



[redacted]

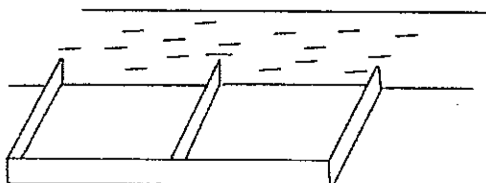
Lập bảng biến thiên ta có:

x	0		25		100
$f'(x)$	‖	+	0	−	‖
$f(x)$	‖	↗	1250	↘	‖

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{x\in(0;100)} f(x) = f(25) = 1250$

Vậy, một hình chữ nhật có chiều rộng là 25 m và chiều dài là 50 m sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập tương tự 2 (theo Cô Vũ Thị Ngọc Huyền): Một người nông dân có 15 triệu đồng để làm một cái hàng rào có dạng hình chữ E dọc theo một con sông với chiều cao hàng rào là 1m (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên liệu là 60.000 đồng/m^2, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng/m^2. Tính diện tích lớn nhất của đất rào thu được?

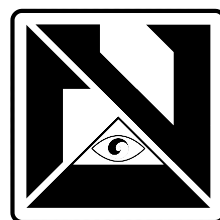


A. 6250 m^2 B. 1250 m^2 C. 3125 m^2 D. 50 m^2

Hướng dẫn giải

[redacted]

Khi đó diện tích khu đất là $S = xy = x\left(100 - \frac{2x}{5}\right) = 100x - \frac{2x^2}{5}$



Xét $f(x) = 100x - \frac{2x^2}{5}$ bài toán trở thành tìm $\max\limits_{x\in(0;250)} f(x) = ?$

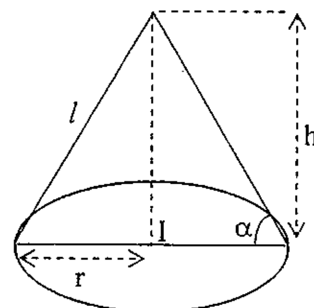
$\Rightarrow f'(x) = 100 - \frac{4x}{5}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 125$

Lập bảng biến thiên ta có:

x	0		125		250
$f'(x)$	‖	+	0	−	‖
$f(x)$	‖	↗	6250	↘	‖

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\max\limits_{x\in(0;250)} f(x) = f(125) = 6250$. **Đáp án A**

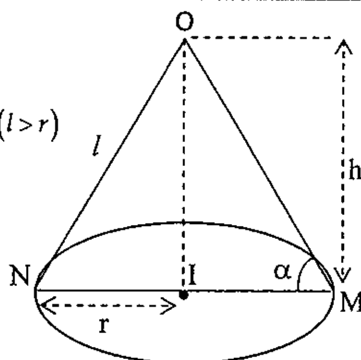
Bài toán 9. Cần phải đặt một ngọn đèn điện ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính r. Hỏi phải treo ở độ cao h là bao nhiêu để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C được biểu thị bởi công thức $C = k\frac{\sin\alpha}{l^2}$ (*α là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn, k - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng.*



■ ***Phân tích:***

- *Gọi các ký hiệu l, M, N, O, I như hình vẽ.*

[redacted]



- *Dựa vào hình vẽ, ta có* $sin\alpha = \frac{h}{l}$.

  Đồng thời $h^2 = l^2 - r^2$ *Điều đó có nghĩa là* $C = k\frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l^3}(l > r)$

- *Bài toán trở thành tìm* $\max\limits_{r\in(0;l)} f(l) = ?$

Hướng dẫn giải.

Gọi h là độ cao của đèn so với mặt bàn ($h > 0$).

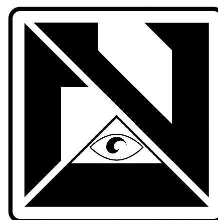
Các ký hiệu l, M, N, O, I như hình vẽ.

Ta có $sin\alpha = \frac{h}{l}$ và $h^2 = l^2 - r^2 \Rightarrow$ cường độ sáng là $C = k\frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l^3}(l > r)$

[redacted]

Lập bảng biến thiên ta thấy

l	0	r		$r\sqrt{\frac{3}{2}}$		l
$f'(x)$		+		0	−	
$f(x)$		↗		max	↘	

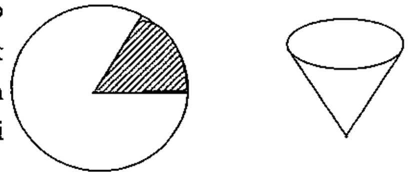


Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{r\in(0;l)} f(l) = f\left(r\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

Và khi đó $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{\frac{3}{2}r^2 - r^2} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

■ **Bình luận:** *So với các bài toán trước thì ở bài toán này, đề bài đã xác định sẵn hàm cho chúng ta nhưng lại đòi hỏi ta phải biến đổi và tìm mối liên hệ giữa các biến từ đó định hướng tìm ra lời giải. So về độ khó đối với các bài toán khác, thì bài toán này có phần dễ hơn. Sau đây ta thử xét một số bài tập tương tự khác xem như thế nào?*

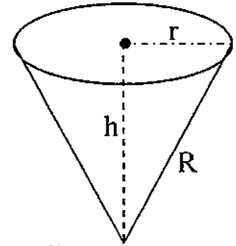
Bài tập tương tự 1: Với một đĩa tròn bằng thép trắng phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành hình nón. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để hình nón có thể tích cực đại?



Hướng dẫn giải

Gọi x là chiều dài cung tròn của phần đĩa được xếp làm hình nón.

Như vậy, bán kính R của đĩa sẽ là đường sinh của hình nón và vòng tròn đáy của hình nón sẽ có độ dài là x.



Bán kính r của đáy được xác định bởi đẳng thức $2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$

[redacted]

Thể tích của khối nón sẽ là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$

$\Rightarrow V^2 = \dfrac{1}{24\pi^2}x^4\left(4\pi^2R^2 - x^2\right)$. Đặt $f(x) = 4\pi^2R^2x^4 - x^6, (0 < x < 2\pi R)$

$f'(x) = 16\pi^2R^2x^3 - 6x^5, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{8\pi^2R^2}{3}$

Lập bảng biến thiên, ta thấy yêu cầu bài toán tương đương với $x = \dfrac{2\pi R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Cách khác: Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy, ta có:

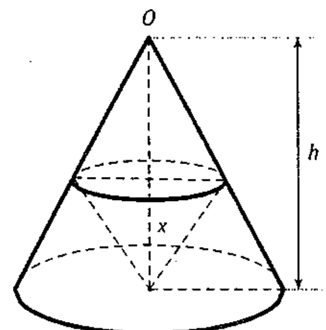
[redacted]

Do đó số đo của cung x tính bằng độ xấp xỉ bằng 295^0 và suy ra cung của hình quạt đã bị cắt là $360^0 - 295^0 = 65^0$.

Bài tập tương tự 2: Cho hình nón đỉnh S, chiều cao là h. Một khối nón có đỉnh là tâm của đáy và đáy là một thiết diện song song với đáy của hình nón đã cho. Chiều cao x của khối nón này là bao nhiêu để thể tích của nó lớn nhất, biết $0 < x < h$?

A. $x = \dfrac{h}{3}$. B. $x = \dfrac{h}{2}$.

C. $x = \dfrac{2h}{3}$. D. $x = \dfrac{h\sqrt{3}}{3}$.



Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm đáy của hình nón S, và I là tâm của đường tròn thiết diện song song với đáy nón đã cho.

Gọi R, r lần lượt là các bán kính của hai đường tròn đáy hình nón O và đường tròn thiết diện. $(0 < r < R)$

[redacted]

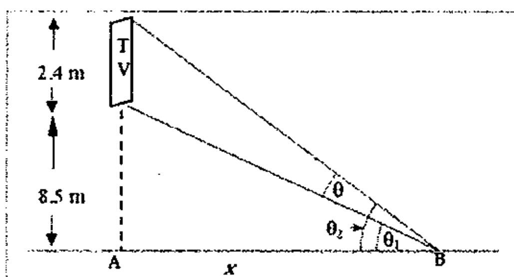
Khi đó $f'(x) = (h-x)^2 - 2x(h-x) = (h-x)(h-3x), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$

Lập bảng biến thiên ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \max\limits_{x\in(0;h)} f(x) = f\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{4\pi R^2 h}{81}$

Cách khác: $f(x) = x(h-x)^2 = \frac{1}{2}2x(h-x)(h-x) \le \frac{1}{2}\frac{(2x+2h-2x)^3}{27} = \frac{4h^3}{27}$

Dấu "=" xảy ra khi $2x = h - x \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$.

Bài toán 10. Màn hình TV đặt thẳng đứng tại một sân vận động, cao 2,4m, cạnh thấp nhất nằm phía trên tầm mặt khán giả A ngồi dưới nó là 8,5m. Một khán giả B có góc quan sát TV là thuận lợi nhất khi góc đối diện với màn hình TV là cực đại, khi đó khoảng cách giữa khán giả A và B là bao nhiêu?



■ **Phân tích:**

- *Do đề bài yêu cầu góc quan sát θ thuận lợi nhất (tức lớn nhất) nên ta tìm cách biểu thị khoảng cách x theo góc θ.*

[redacted]

- *Đến đây, bài toán trở thành tìm $\min\limits_{x>0} g(x) = ?$*

Hướng dẫn giải.

Gọi x là khoảng cách từ khán giả B đến khán giả A.

Ta thấy rằng yêu cầu bài toán chính là xác định $\max\theta$ để từ đó suy ra khoảng cách $x = ?$

Ta có $tan\theta = tan(\theta_2 - \theta_1) = \dfrac{tan\theta_2 - tan\theta_1}{1 + tan\theta_2\, tan\theta_1} = \dfrac{\dfrac{2,4+8,5}{x} - \dfrac{8,5}{x}}{1 + \dfrac{(2,4+8,5)}{x}.\dfrac{8,5}{x}} = \dfrac{\dfrac{2,4}{x}}{1 + \dfrac{1853}{20x^2}} = \dfrac{2,4}{\underbrace{x + \dfrac{1853}{20x}}_{g(x)}}$

Ta thấy rằng $max\,\theta \Leftrightarrow max(tan\theta) \Leftrightarrow min\,g(x)$.

Đặt $g(x) = x + \dfrac{1853}{20x}$. Bài toán trở thành tìm $min\,g(x)$ [illegible]

Ta có $g'(x) = 1 - \dfrac{1853}{20x^2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{1853}{20}} \approx 9,6$[illegible]

Lập bảng biến thiên

x	0		x_o		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$g(x)$	‖	↘	min	↗	‖

ta suy ra $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} g(x) = g\left(\sqrt{\dfrac{1853}{20}}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

■ **Bình luận:** *Có vài điều ta cần lưu ý khi giải với các bài toán liên quan đến góc là*

***Một là**, trong các tỉ số lượng giác thì* $max\,\alpha \Leftrightarrow max\sin\alpha \Leftrightarrow max\tan\alpha$ *với* $0 < \alpha < 10^0$.

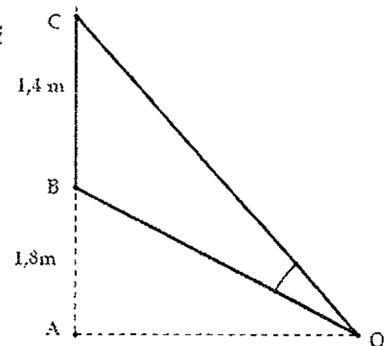
***Hai là**, ta có thể sử dụng **bất đẳng thức Cauchy** nhằm tìm nhanh giá trị maxg(x) như sau:*

$g(x) = x + \dfrac{1853}{20x} \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{x.\dfrac{1853}{20x}} = 2\sqrt{\dfrac{1853}{20}}$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow x = \dfrac{1853}{20x} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{1853}{20}}$

***Ba là**, việc sử dụng công thức* $tan\theta = tan(\theta_2 - \theta_1) = \dfrac{tan\theta_2 - tan\theta_1}{1 + tan\theta_2\, tan\theta_1}$ *giúp ta chuyển bài toán từ việc tìm góc sang tìm cạnh (đúng với tinh thần đặt ra của câu hỏi). Hai bài tập tương tự dưới đây sẽ giúp các bạn rèn luyện và củng cố thêm cho mình.*

***Bài tập tương tự 1**:* Một màn ảnh chữ nhật cao 1,4m được đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn ảnh). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó?

Hướng dẫn giải



Với bài toán này ta cần xác định

$OA = ? \longrightarrow \measuredangle BOC \to max$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $tan\measuredangle BOC \to max$.

Đặt $OA = x(m), x > 0$.

Ta có $tan\measuredangle BOC = tan(\measuredangle AOC - \measuredangle AOB)$

$= \dfrac{tan\measuredangle AOC - tan\measuredangle AOB}{1 + tan\measuredangle AOC.tan\measuredangle AOB} = \dfrac{\dfrac{AC}{OA} - \dfrac{AB}{OA}}{1 + \dfrac{AC.AB}{OA^2}}$

$\Rightarrow f(x) = tan\measuredangle BOC = \dfrac{1,4x}{x^2 + 5,76}, x > 0$.

Bài toán trở thành tìm $x > 0$ để $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$f'(x) = \frac{-1,4(x^2 - 5,76)}{(x^2 + 5,76)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5,76 \xrightarrow{x>0} x = 2,4$$

x	0		2,4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$\frac{84}{193}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận vị trí đứng cho góc nhìn lớn nhất là cách màn ảnh 2,4m.

Bài tập tương tự 2 (trích từ Đề thi TSĐH môn Vật Lý khối A-A1 năm 2013) Trong một thí nghiệm về giao thoa sóng nước, hai nguồn kết hợp O_1 và O_2 dao động cùng pha, cùng biên độ. Chọn hệ tọa độ vuông góc xOy có $OP = 4,5\,cm$ và $OQ = 8\,cm$. Phải dịch chuyển nguồn O_2 trên trục Oy như thế nào để góc $\measuredangle PO_2Q$ có giá trị lớn nhất?

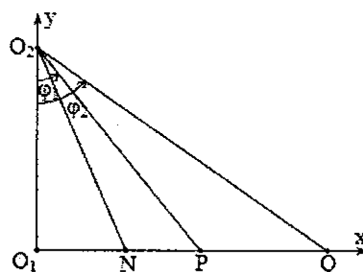
Hướng dẫn giải

Đặt $O_1O_2 = x > 0$ và $\varphi = \measuredangle PO_2Q \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Để góc $\varphi\, max \Rightarrow tan\varphi\, max$

Ta có: $tan\measuredangle PO_2Q = tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tan\varphi_2 - tan\varphi_1}{1 + tan\varphi_2 . tan\varphi_1}$

$$\Rightarrow tan\measuredangle PO_2Q = \frac{\frac{8}{x} - \frac{4,5}{x}}{1 + \frac{8}{x}.\frac{4,5}{x}} = \frac{3,5}{x + \frac{36}{x}}$$



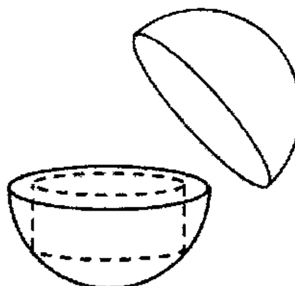
Để $tan\measuredangle PO_2Q \to max \Leftrightarrow \left(x + \frac{36}{x}\right) \to min$. Ta có $x + \frac{36}{x} \geq 2\sqrt{36} = 12$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{36}{x} \Leftrightarrow x = 6$.

Do đó nguồn O_2 cách nguồn O_1 một khoảng cách 6 cm thì thỏa yêu cầu bài toán

Bài toán 11. Công ty mỹ phẩm chuẩn bị cho ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai với thiết kế là một khối cầu như viên ngọc trai khổng lồ, bên trong là một khối trụ nằm trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng da như hình vẽ (hình ảnh chỉ mang tính chất minh họa).

Theo dự kiến, nhà sản xuất có dự định để khối cầu có bán kính là $R = 3\sqrt{3}$ cm. Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem để thể tích thực ghi trên bìa hộp là lớn nhất (với mục đích thu hút khách hàng).



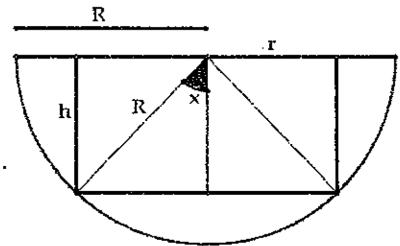
A. $54\pi\ cm^3$.　　B. $18\pi\ cm^3$.

C. $108\pi\ cm^3$.　　D. $45\pi\ cm^3$.

(Sưu tầm Facebook, theo Vũ Thị Ngọc Huyền)

Phân tích:

- *Ta tạo lát cắt dọc xuống nửa quả cầu như hình vẽ bên. Gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính của hình trụ.*



- *Ta thấy rằng thể tích của khối trụ sẽ là:*
  $V_{tru} = \pi r^2 h$ *(phụ thuộc theo 2 biến r và h).*
- *Ta lại có mối liên hệ giữa chúng là* $h^2 + r^2 = R^2 = const$.
  Để thuận tiện ta sẽ tính r theo h.

Hướng dẫn giải.

[redacted]

Khi đó $f'(h) = R^2 - 3h^2$, $f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \dfrac{R}{\sqrt{3}} < R$.

Lập bảng biến thiên ta có:

h	0		$\dfrac{R}{\sqrt{3}}$		R
$f'(h)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(h)$	‖	↗	$f\left(\dfrac{R}{\sqrt{3}}\right)$	↘	‖

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\max\limits_{h\in(0;R)} f(h) = f\left(\dfrac{R}{\sqrt{3}}\right)$

Khi đó ta có: $V_{tru} = \pi r^2 h = \pi h\left(R^2 - h^2\right) = \pi\dfrac{R}{\sqrt{3}}\left(R^2 - \dfrac{R^2}{3}\right) = \dfrac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} \xleftrightarrow{R=3\sqrt{3}} V_{tru} = 54\pi$

Bình luận: *ngoài cách giải trên, ta có thể làm như sau.*

Đặt $\begin{cases} h = R\cos x \\ r = R\sin x \end{cases} \left(0 < x < 90^0\right)$. $V_{tru} = \pi r^2 h = \pi R^3 \sin^2 x.\cos x$.

Xét $f(x) = \sin^2 x.\cos x$. *Bài toán trở thành tìm* $\max\limits_{x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} f(x) = ?$

Đặt $t = \cos x, t \in (0;1) \Rightarrow g(t) = \left(1 - t^2\right)t = -t^3 + t \Rightarrow g'(t) = -3t^2 + 1$

Khi đó $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,(tm) \\ t = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,(ktm) \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $\max\limits_{x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} f(x) = \max\limits_{t\in(0;1)} g(t) = g\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3} = \cos x$

Khi đó ta có $V = \pi R^3\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} \xrightarrow{R=3\sqrt{3}} V = 54\pi\left(cm^3\right)$

Bài tập tương tự 1: Cho hình trụ nối tiếp trong hình cầu bán kính R. Xác định chiều cao và bán kính để hình trụ có thể tích lớn nhất?

Hướng dẫn giải

Gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ nội tiếp khối cầu.

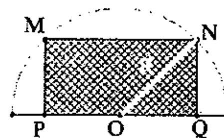
Khi đó ta có $\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$

Mặt khác, $V = \pi r^2 h = \pi h\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)$.

Xét hàm số $f(h) = h\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right), (0 < h < R) \Rightarrow f'(h) = R^2 - \frac{3h^2}{4} = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Lập bảng biến thiên, ta có yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} h = \frac{2R}{\sqrt{3}} \\ r = \frac{R\sqrt{6}}{3} \end{cases}$

Bài tập tương tự 2: Diện tích của hình chữ nhật nội tiếp nửa hình tròn bán kính $R = 3$ (xem hình bên) có giá trị lớn nhất bằng:



A. 9   B. $6\sqrt{2}$

C. $6\sqrt{3}$ D. 7.

Hướng dẫn giải

[redacted]

Ta có $f'(x) = 8xR^2 - 16x^3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{R^2}{2} \Rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}}$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $\max\limits_{x\in(0;R)} f(x) = f\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = R^2 = 9$

Cách khác: Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy* $S_{MNPQ} = 2x\sqrt{R^2 - x^2} \le 2.\frac{x^2 + R^2 - x^2}{2} = R^2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}}$

[redacted]

■ **Phân tích:**

- *Với kiến thức Vật lý đã học, ta biết* $v(t) = s'(t)$. *Do đó để tìm giá trị lớn nhất trong 5 giây đầu tiên* $t \in [0;5]$ *thì ta chỉ cần vận dụng kiến thức đạo hàm đã học.*

Hướng dẫn giải

$v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2 - 9, v'(t) = -6t + 12, v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Lập bảng biến thiên ta có:

t	0		2		5
$v'(t)$		+	0	–	
$v(t)$		↗	3	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{t\in(0;5)} v(t) = v(2) = 3$. **Đáp án C.**

■ Bình luận: *Ứng dụng của đạo hàm trong Vật lý là rất đa dạng nhưng đặc biệt thể hiện rõ nét nhất chính là qua các bài toán chuyển động khi liên quan đến các đại lượng quãng đường, vận tốc và thời gian. Không chỉ riêng ở các bài toán chuyển động như vậy, ta còn bắt gặp các ứng dụng đạo hàm trong Vật lý ở các bài toán khác. Mời bạn đọc tiếp tục theo dõi các bài toán tiếp theo sau để hiểu rõ hơn.*

Bài tập tương tự 1: Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)\,(km)$ là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}\,(km)$. Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu (biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?

A. $10e^4\,(km/s)$. B. $5e^4\,(km/s)$. C. $3e^4\,(km/s)$. D. $9e^4\,(km/s)$.

Hướng dẫn giải

$v(t) = s'(t) = 2te^{t^2+3} + 2e^{3t+1} + 6te^{3t+1} \Rightarrow v(1) = 2e^4 + 2e^4 + 6e^4 = 10e^4\,(km/s)$

Bài tập tương tự 2: Cho phương trình chuyển động của một chất điểm $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, với đơn vị đo của t là giây, và s là mét. Khi nào chất điểm đứng yên biết rằng biểu thức của phương trình $v(t)$ tại điểm t biết rằng $v(t) = f'(t)$?

Hướng dẫn giải

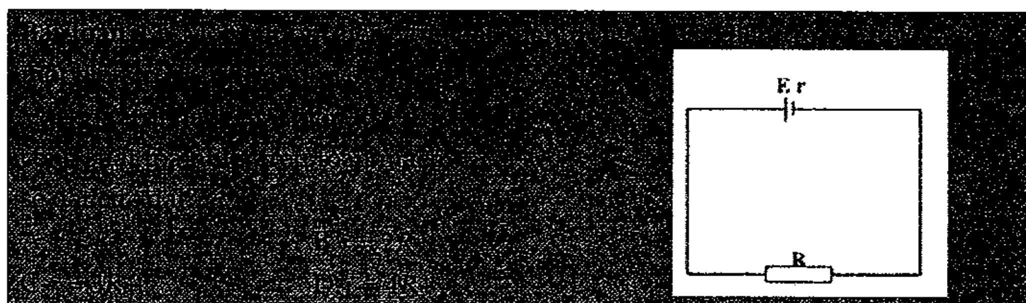
Theo đề bài ta có $v(t) = f'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ [illegible]

Chất điểm đứng yên khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0$ [illegible]

Bài tập tương tự 3: Một máy bay Cessa cất cánh từ sân bay gần mặt nước biển có quỹ đạo bay theo hàm số $h(t) = 2000\ln(t+1)$ với h tính theo *feet* và t tính theo phút. Tính tốc độ cất cánh tại thời điểm $t = 3$ phút ? (biết rằng 1 *feet* = 0,3048 mét)

Hướng dẫn giải

$h'(t) = \dfrac{2000}{t+1}, \forall t > -1$. Do đó tốc độ cất cạnh chính là $h'(3) = 500\,feet \approx 152{,}4$ mét.



■ **Phân tích:**

- *Để làm được dạng toán này, trước tiên ta cần có kiến thức về dòng điện 1 chiều đã học ở lớp dưới: công suất tỏa nhiệt trên toàn mạch sẽ là $P = RI^2$ và đồng thời cường độ dòng điện trong mạch sẽ là $I = \dfrac{E}{R+r}$.*
- *Đến đây ta thấy P có thể tính theo R và r. Và do đó ta có thể vận dụng kiến thức về đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức P.*

Hướng dẫn giải.

Theo công thức công suất tỏa nhiệt ta có $P = RI^2$ với $I = \dfrac{E}{R+r}$

$\Rightarrow P = \dfrac{RE^2}{(R+r)^2}(R>0)$. Xét hàm số $f(R) = \dfrac{RE^2}{(R+r)^2}$ với $R>0$

Ta tìm $f'(R) = E^2\dfrac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} = E^2\dfrac{r-R}{(R+r)^3}, f'(R) = 0 \Leftrightarrow r = R$

Lập bảng biến thiên ta có:

R	0		r		$+\infty$
$f'(R)$	||	+	0	−	||
$f(R)$	||	↗	$f(r)$	↘	||

Suy ra $max\, f(R) = f(r) = \dfrac{E^2}{4r}$. Ta chọn **đáp án A.**

■ **Bình luận:** *Ta có thể dùng bất đẳng thức Cauchy để giải nhanh bài toán như sau:*

Ta có $P = \dfrac{RE^2}{(R+r)^2} = \dfrac{E^2}{2r + R + \dfrac{r^2}{R}} \le \dfrac{E^2}{2r+2r} = \dfrac{E^2}{4r}$ **do** $\mathbf{R + \dfrac{r^2}{R} \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{R.\dfrac{r^2}{R}} = 2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \mathbf{R = \dfrac{r^2}{R} \Leftrightarrow r = R}$**. Đáp án A.**

Bài tập tương tự 1: Một dòng điện (đơn vị Ampere – A) trong mạch máy khuếch đại tuân theo hàm số theo thời t(giây – s) cho bởi công thức $i(t) = 0,1cos\left(120\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ (A). Hãy xác định biểu thức của điện áp đi qua cuộn cảm có độ lớn $2mH$, biết rằng $V_L = L.i'(t)$?

Hướng dẫn giải

$i'(t) = -12\pi sin\left(120\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$. Ta có $V_L = Li'(t) = -24.10^{-3} sin\left(120\pi t + \frac{\pi}{6}\right)(V)$

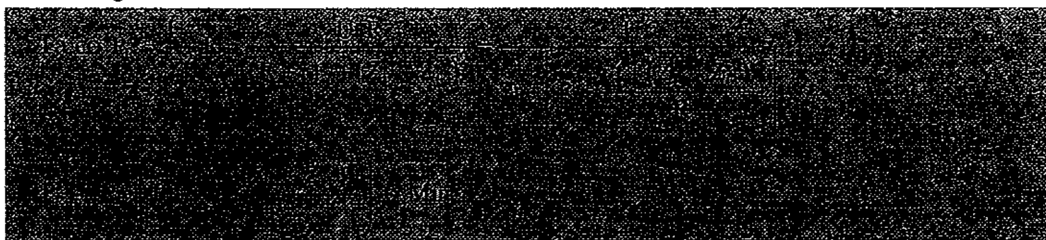
Bài tập tương tự 2: Mạch điện xoay chiều gồm biến trở, cuộn dây không thuần cảm và tụ điện ghép nối tiếp. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp có biểu thức là $u = U\sqrt{2}\sin \varpi t(V)$. Trong đó U và ϖ không đổi. Khi biến trở $R = 75\Omega$ thì công suất tiêu thụ trên biến trở đạt giá trị lớn nhất. Xác định điện trở thuần của cuộn dây và tổng trở Z của mạch *AB*. Biết rằng chúng đều có giá trị nguyên.

A. $r = 21\Omega$ và $Z = 120\Omega$.
B. $r = 15\Omega$ và $Z = 100\Omega$.
C. $r = 12\Omega$ và $Z = 157\Omega$.
D. $r = 35\Omega$ và $Z = 150\Omega$.

(trích thi thử lần 4 - THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An 2012)

Hướng dẫn giải

Mạch gồm (**R đổi**)----(**L-r**)-----(**C**) có U và ω = const

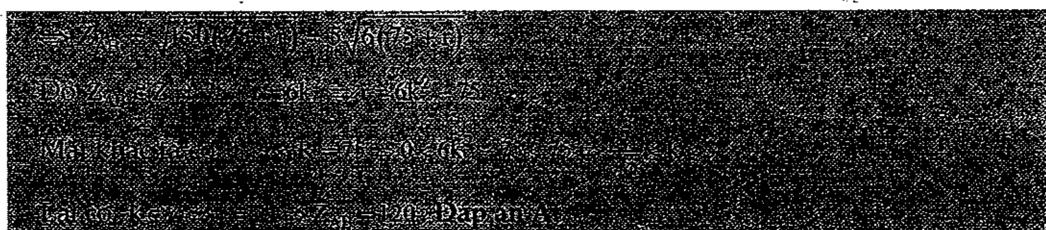

[redacted]

Dùng đạo hàm hoặc áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$R + \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R} \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow R^2 = r^2 + (Z_L - Z_C)^2$

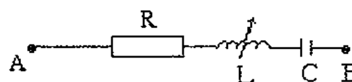
Trở lại với bài toán ta có $R = 75, r \in \mathbb{Z}, Z_{AB} \in \mathbb{Z}$

Ta có: $Z_{AB} = \sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{R^2 + 2Rr + \underbrace{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}_{R^2}} = \sqrt{2R^2 + 2Rr}$


[redacted]

Bài tập tương tự 3: Cho mạch điện xoay chiều AB như hình vẽ $u_{AB} = 200\sqrt{2} sin100\pi t(V)$, $R = 100\Omega, C = \frac{10^{-4}}{\pi}(F)$, cuộn cảm thuần có độ tự cảm L thay đổi được.

Hãy xác định L để hiệu điện thế hiệu dụng hai đầu cuộn cảm U_L đạt cực đại.



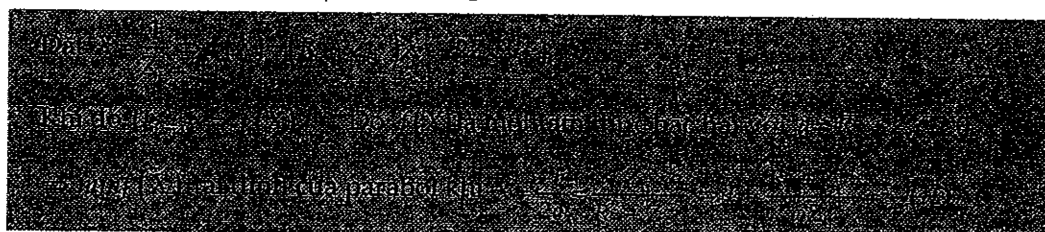
A. $\frac{2}{\pi}(H)$
B. $\frac{\sqrt{2}}{\pi}(H)$.
C. $\frac{1}{\pi}(H)$.
D. $\frac{1}{2\pi}(H)$

Hướng dẫn giải:

Cảm kháng $Z_L = \omega L$ và dung kháng $Z_C = \frac{1}{C\omega} = 100\Omega$

Đồng thời tổng trở $Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$

Ta có $U_L = IZ_L = \dfrac{UZ_L}{Z} = \dfrac{U}{\sqrt{(R^2 + Z_C^2)\dfrac{1}{Z_L^2} - 2\dfrac{Z_C}{Z_L} + 1}}$


[redacted]

Và khi đó $U_{L max} = \dfrac{U\sqrt{R^2 + Z_C^2}}{R} = 200\sqrt{2}(V)$

* Nhận xét: Nếu L = const, tụ C có điện dung thay đổi. Tìm C để U_{Cmax} đạt giá trị cực đại ta làm tương tự trên và kết quả là: $U_{Cmax} = \dfrac{U\sqrt{R^2 + Z_L^2}}{R} \Leftrightarrow Z_C = \dfrac{R^2 + Z_L^2}{Z_L}$

Bài toán 14. Khi cá hồi bơi với tốc độ $v(km/h)$ ngược dòng nước, năng lượng sản ra của nó trên một đơn vị thời gian là $v^3\ (J)$, đơn vị là Jun. Người ta thấy rằng khi cá di cư cố gắng cực tiểu hóa năng lượng tổng thể để bơi một cách nhất định. Nếu vận tốc dòng nước là $a(km/h)$ thì thời gian cần bơi được khoảng cách L là $\dfrac{L}{v-a}$ và năng lượng sản ra là $E(v) = qv^3\dfrac{L}{v-a}$ trong đó q là hằng số dương. Để giảm thiểu tối đa năng lượng khi bơi quãng đường L thì tốc độ v cần thỏa mãn

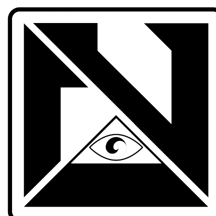
A. $v = \dfrac{a}{2}$ B. $v = \dfrac{3a}{2}$ C. $v = \dfrac{5a}{2}$ D. $v = \dfrac{7a}{2}$

(Bài toán từ tác giả Hứa Lâm Phong, 2016)

■ **Phân tích:**

- *Do bài toán đã cho ta sẵn hàm* $E(v) = qv^3\dfrac{L}{v-a}$ *nên ta có thể ứng dụng đạo hàm tìm min của E. (lưu ý* v > a *).*

Hướng dẫn giải.



$$E(v) = qv^3\frac{L}{v-a} \Rightarrow E'(v) = q\frac{3v^2(v-a) - v^3}{(v-a)^2} = q\frac{v^2(2v-3a)}{(v-a)^2}, \forall v > a$$

$E'(v) = 0 \Leftrightarrow v = \dfrac{3a}{2}$. Lập bảng biến thiên ta thấy

v	0		$\frac{3a}{2}$		$+\infty$
$E'(v)$		−	0	+	
$E(v)$		↘	$\frac{27}{4}a^3$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $minE(v)=E\left(\frac{3a}{2}\right)=\frac{27}{4}a^3$

■ **Bình luận:** *Trong thực tế, khi khảo sát việc bơi ngược dòng của những chú cá này, ta thấy tốc độ của chúng gần gấp 1,5 lần tốc độ của dòng nước.*

Bài tập tương tự 1: Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức: $f(v)=\frac{290,4v}{0,36v^2+13,2v+264}$ (xe/ giây), trong đó $v(km/h))$ là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất?

Hướng dẫn giải

$f(v)=\frac{290,4v}{0,36v^2+13,2v+264}\Rightarrow f'(v)=290,4\frac{-0,36v^2+264}{\left(0,36v^2+13,2v+264\right)^2}, v>0$

$f'(v)=0\Leftrightarrow v=\frac{\sqrt{264}}{0,6}=\frac{10\sqrt{66}}{3}\approx 27,08\ (km/h)$

Lập bảng biến thiên ta có:

v	0		$\frac{10\sqrt{66}}{3}$		$+\infty$
$f'(v)$	‖	+	0	−	‖
$f(v)$	‖	↗	max	↘	‖

Bài tập tương tự 2: Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là $6\ (km/h)$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v\ (km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$ (trong đó c là một hằng số dương, E được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơi ngược dòng quãng đường 300 km trên trong khoảng thời gian t với vận tốc bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

A. $12\ (km/h)$. B. $9\ (km/h)$. C. $21\ (km/h)$. D. $15\ (km/h)$.

Hướng dẫn giải

- Vận tốc khi cá bơi ngược dòng sẽ là $v-6$
- Do đó thời gian để đi quãng đường 300 km là $t=\frac{300}{v-6}$
- Do đó năng lượng tiêu hao sẽ là $E(v)=300c\frac{v^3}{v-6}$
- Do $c>0\Rightarrow E(v)_{min}\Leftrightarrow\frac{v^3}{v-6}=f(v)\to min$

Với $v>6, f'(v)=\frac{3v^2(v-6)-v^3}{(v-6)^2}=\frac{2v^3-18v}{(v-6)^2}, f'(v)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=0\ (ktm)\\v=9\ (tm)\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta nhận $v=9$.


[redacted]

■ **Phân tích:**

• *Khối lượng riêng lớn nhất tương ứng với thể tích của vật nhỏ nhất. Do bài toán đã xác lập hàm nên ta có thể dùng công cụ đạo hàm để min cho biểu thức trên.*

Hướng dẫn giải.

$V'(t) = -0,06426 + 2.0,0085043t - 3.0,0000679t^2$

$$V'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx 79,53138 \notin (0^0;30^0) \\ t \approx 3,9665 \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta có:

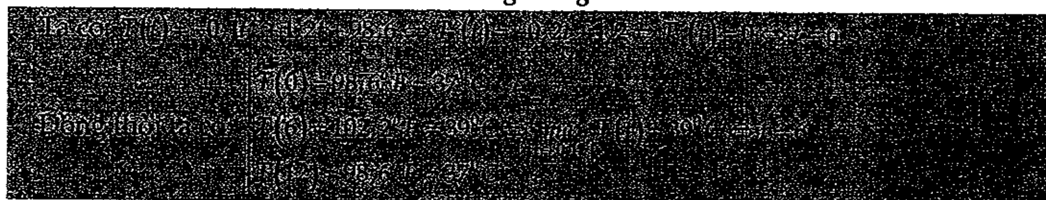
t	0		3,9665		30
$V'(t)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$V(t)$	‖	↘	V_{min}	↗	‖

Dựa vào bảng biến thiên ta có khối lượng riêng lớn nhất của vật khi thể tích nhỏ nhất lúc vật có nhiệt độ xấp xỉ gần bằng 4^0C.

■ **Bình luận:** *Trong thực tế, thì ở nhiệt độ là 4 độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất. Đây là 1 kiến thức ta đã học được từ Vật Lý lớp 7.*

Bài tập tương tự 1: Nhiệt độ T của một người trong cơn bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6,\ 0 \le t \le 12$, trong đó T là nhiệt độ $(^\circ F - Fahrenheit)$ theo thời gian t trong ngày. Tìm nhiệt độ lớn nhất độ celcius $(^\circ C - Celcius)$ của người bệnh trong ngày và thời điểm mà nó xảy ra? (Biết rằng $^\circ C = \dfrac{^\circ F - 32}{1,8}$)

Hướng dẫn giải


[redacted]

Vậy, nhiệt độ lớn nhất của người bệnh trong ngày là 39^0C khi $t = 6$.

Cách khác: Ta có $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6 = 102,2 - 0,1(t-6)^2 \le 102,2\ \forall t \in [0;12]$

Vậy dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t = 6$. Do đó $max T = 102,2 \Leftrightarrow t = 6$

Bài tập tương tự 2: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ (kết quả khảo sát được trong tháng 8 vừa qua). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ ngày) tại thời điểm t. Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ:

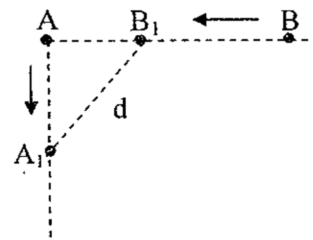
A.15. B.30. C. 20. D. 12.

Hướng dẫn giải

Ta có $f(t) = 45t^2 - t^3 \Rightarrow f'(t) = 90t - 3t^2 \xrightarrow{g(t)=90t-3t^2} g'(t) = 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$

Lập và dựa vào bảng biến thiên của $g(t) \Rightarrow t = 15$ là giá trị cần tìm. **Đáp án A**

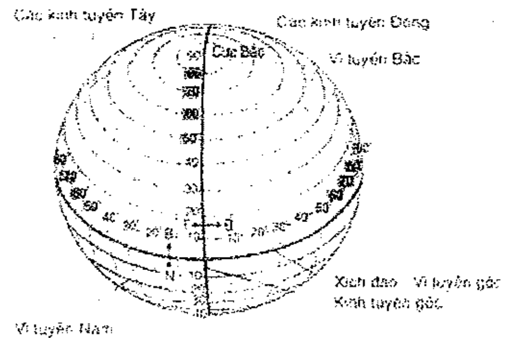
Bài toán 16. Hai con tàu A và B đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai tàu cùng khởi hành, tàu A chạy về hướng Nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu B chạy về vị trí hiện tại của tàu A với vận tốc 7 hải lý/giờ. Hãy xác định thời điểm mà khoảng cách giữa hai tàu là lớn nhất ?



■ **Phân tích:**

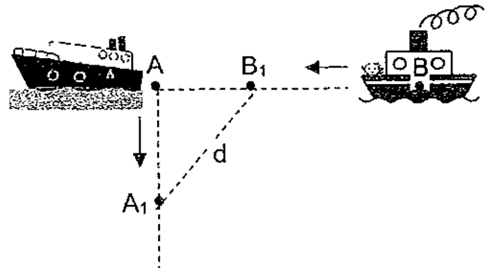
- *Trước tiên, bạn cần hiểu đôi chút về khái niệm vĩ tuyến và kinh tuyến?*

Trên Trái Đất hay các hành tinh hoặc thiên thể hình cầu, ***vĩ tuyến*** *là một vòng tròn tưởng tượng nối tất cả các điểm có cùng vĩ độ. Trên Trái Đất, vòng tròn này có hướng từ đông sang tây. Vị trí trên vĩ tuyến được xác định bằng kinh độ. Một vĩ tuyến luôn vuông góc với một kinh tuyến tại giao điểm giữa chúng. Các vĩ tuyến ở gần cực Trái Đất có đường kính nhỏ hơn. (theo wikipedia.org).*



Kinh tuyến *là một nửa đường tròn trên bề mặt Trái Đất, nối liền hai Địa cực, có độ dài khoảng 20.000 km, chỉ hướng bắc-nam và cắt thẳng góc với đường xích đạo. Mặt phẳng của kinh tuyến 0° (chạy qua đài quan sát thiên văn tại Greenwich thuộc Luân Đôn) và kinh tuyến 180°, chia Trái Đất ra làm hai bán cầu – Bán cầu đông và Bán cầu tây.(theo wikipedia.org).*

- *Như vậy khi các tàu, thuyền đi trên biển chúng ta sẽ dùng một đơn vị đo khoảng cách khác là hải lý (1 hải lý = 1852 mét). Từ mô hình và mô tả của bài toán ta có thể gọi t là thời gian mà sau khi xuất 2 tàu cách nhau một khoảng d.*



- *Khi đó* $d = A_1B_1^2 = AB_1^2 + AA_1^2$.

Trong đó AA_1 *chính là quãng đường của tàu A đi được. Dựa vào gợi ý 2 tàu cách nhau ban đầu 5 hải lý theo đường vĩ tuyến, nên ta có thể tính* $AB_1^2 = (5 - BB_1)^2$.

- *Cuối cùng, ta vận dụng công thức liên hệ giữa quãng đường, vận tốc và thời gian là* $S = v.t \Rightarrow \begin{cases} AA_1 = v_A t \\ BB_1 = v_B t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải.

Tại thời điểm t sau khi xuất phát, khoảng cách giữa hai tàu là d. Khi đó tàu A đang ở vị trí A_1 và tàu B đang ở vị trí B_1 như hình vẽ.

Ta có $d^2 = AB_1^2 + AA_1^2 = (5 - BB_1)^2 + AA_1^2 = (5-7t)^2 + (6t)^2$

Với BB_1 là quãng đường tàu B đi được $BB_1 = v_B.t = 7t$

Và AA_1 là quãng đường tàu A đi được $AA_1 = v_A.t = 6t$

Suy ra $d = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$. Đặt $f(t) = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$ với $t > 0$.

Bài toán trở thành tìm $\min\limits_{t\in(0;+\infty)} f(t) = ?$

Ta có: $f'(t) = \dfrac{170t - 70}{2\sqrt{85t^2 - 70t + 25}}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{7}{17}(h)$

Lập bảng biến thiên ta thấy

t	0		$\frac{7}{17}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{6\sqrt{85}}{17}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{t\in(0;+\infty)} f(t) = f\left(\dfrac{7}{17}\right) = \dfrac{6\sqrt{85}}{17} \approx 3,254$ (hải lý)

■ **Bình luận:** *Ta có thêm một cách khác để tìm minf(t) như sau:*

$$f(t) = \sqrt{85t^2 - 70t + 25} = \sqrt{85t^2 - 70t + \frac{245}{17} + \frac{185}{17}} = \sqrt{85\left(t - \frac{7}{17}\right)^2 + \frac{185}{17}} \geq \frac{6\sqrt{85}}{17}$$

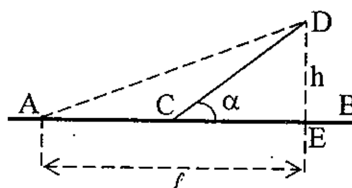
$\Rightarrow \min f(t) = \dfrac{6\sqrt{85}}{17} \Leftrightarrow t = \dfrac{7}{17}$. **(hoặc sử dụng cực trị của parabol)**

Bài tập tương tự 1: Từ cảng A dọc theo đường sắt AB cần phải xác định một trạm trung chuyển hàng hóa C và xây dựng một con đường từ C đến D. Biết rằng vận tốc trên đường sắt là v_1 và trên đường bộ là v_2 ($v_1 > v_2$). Hãy xác định phương án chọn địa điểm C để thời gian vận chuyển hàng từ cảng A đến cảng D là ngắn nhất?

Hướng dẫn giải

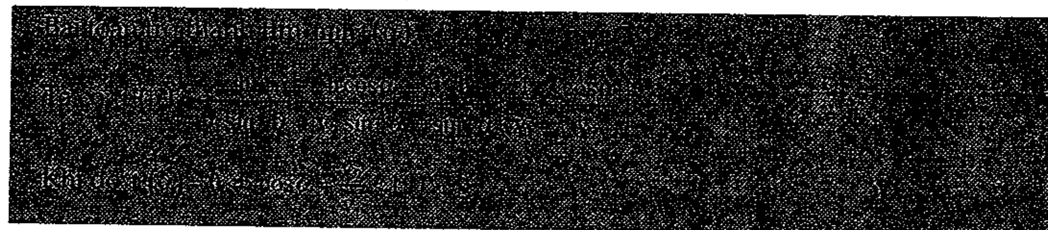
Gọi t là thời gian vận chuyển hàng hóa từ cảng A đến cảng D.

Thời gian t là: $t = \dfrac{AC}{v_1} + \dfrac{CD}{v_2} = \dfrac{AE - CE}{v_1} + \dfrac{CD}{v_2}$



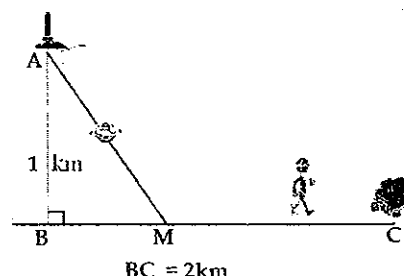
$\Rightarrow t = \dfrac{l - \dfrac{h}{\tan\alpha}}{v_1} + \dfrac{\dfrac{h}{\sin\alpha}}{v_2} = \dfrac{l - h.\cot\alpha}{v_1} + \dfrac{h}{v_2 \sin\alpha}$

Xét hàm số $t(\alpha) = \dfrac{l - h.\cot\alpha}{v_1} + \dfrac{h}{v_2 \sin\alpha}$


[redacted]

Lập bảng biến thiên, ta suy ra $min\,t(\alpha) \Leftrightarrow cos\alpha = \frac{v_2}{v_1}$

Bài tập tương tự 2: Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng AB bằng 1km và một kho hàng được đặt tại vị trí C cách B một khoảng 2km. Người canh giữ hải đăng có thể chèo thuyền từ vị trí A đến vị trí M trên bờ biển nằm giữa B và C với vận tốc 3km/h, sau đó đi bộ đến vị trí C với vận tốc 5km/h. M cần cách B một khoảng ngắn nhất bằng bao nhiêu để thời gian người đó đi đến kho hàng nhanh nhất ?



Hướng dẫn giải

[redacted]

Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là $t = t_{AM} + t_{MC} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{3} + \frac{2-x}{5}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{3} + \frac{2-x}{5}$ trên đoạn $[0;2]$.

Bài toán trở thành tìm $\min\limits_{x\in[0;2]} f(x) = ?$

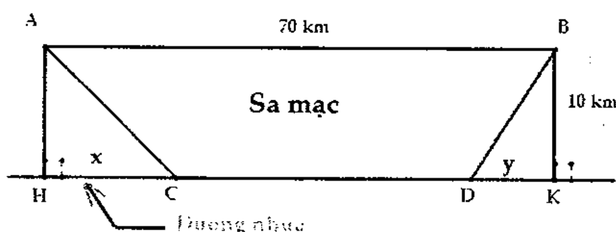
[redacted]

Bài toán 17. Một nhà địa chất học đang ở tại điểm A trên sa mạc. Anh ta muốn đến điểm B và cách A một đoạn là 70km. Trong sa mạc thì xe anh ta chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30km/h. Nhà địa chất ấy phải đến được điểm B sau 2 giờ. Vì vậy, nếu anh ta đi thẳng từ A đến B sẽ không thể đến đúng giờ. May mắn thay, có một con đường nhựa song song với đường nối A và B và cách AB một đoạn 10 km. Trên đường nhựa này thì xe của nhà địa chất học này có thể di chuyển với vận tốc 50km/h. Làm thế nào để nhà địa chất học đến sớm nhất (đảm bảo trong khung giờ cho phép)?

(Trích dẫn từ Bài toán của Thầy Trần Nam Dũng, theo sputnikedu.com)

■ **Phân tích:**

- *Ta có thể mô tả bài toán trên bằng hình vẽ sau:*



- *Như đã phân tích ở trên, nếu đi trực tiếp từ A đến B trên sa mạc với vận tốc và khoảng cách hiện có thì nhà địa chất học không thể đến đúng thời gian quy định*
- *Vì vậy cần thiết phải chia quãng đường đi được thành 3 giai đoạn:*
  Giai đoạn 1: đi từ A đến C (từ sa mạc đến đường nhựa song song)
  Giai đoạn 2: đi từ C đến D (một quãng đường nào đó trên đường nhựa)
  Giai đoạn 3: đi từ D đến B (từ điểm kết thúc D trên đường nhựa đi tiếp đến B băng qua sa mạc).

Hướng dẫn giải.

Gọi H, K, C, D là các điểm như hình vẽ.

Khi đó gọi $HC = x\ \left(0 < x < 70\right)$ và $DK = y\left(0 < y < 70\right)$

[redacted]

Và quãng đường đi C đến D là $CD = 70 - \left(x + y\right) \Rightarrow t_3 = \dfrac{CD}{v_{street}} = \dfrac{70 - \left(x + y\right)}{50}$

Vậy tổng thời gian mà nhà địa chất học đi từ A đến B là $T = t_1 + t_2 + t_3$

$\Rightarrow T\left(x;y\right) = \dfrac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \dfrac{\sqrt{10^2 + y^2}}{30} + \dfrac{70 - \left(x + y\right)}{50}$

Đây là một biểu thức có dạng đối xứng 2 biến x, y và ta cần tìm $minT\left(x;y\right)$

[redacted]

Lập bảng biến thiên ta có $\min\limits_{u \in (0;70)} f\left(u\right) = f\left(\dfrac{15}{2}\right) = \dfrac{29}{30}$

Do đó ta có $T\left(x;y\right) = f\left(x\right) + f\left(y\right) \geq \dfrac{29}{30} + \dfrac{29}{30} = \dfrac{29}{15} \approx 1{,}93$

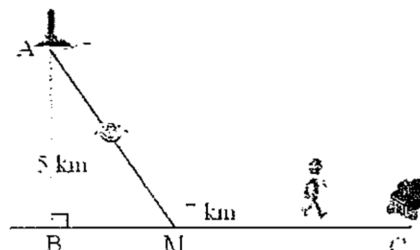
Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \dfrac{15}{2}$.

■ **Bình luận:** *Bài toán quãng đường, vận tốc, thời gian thì ta nhận thấy có 2 mối quan tâm lớn trong thực tế là đi làm sao để quãng đường là ngắn nhất hoặc thời gian là ít nhất. Trong thực tế, đời sống hằng ngày, điều này không phải lúc nào cũng đúng bởi lẽ còn phải chịu sự tác động của nhiều yếu tố khác nhau như thời điểm, mật độ di chuyển, động cơ và*

nhiều thứ ta không lường trước được. Việc lý tưởng hóa các bài toán chỉ ở mức sai số chấp nhận được.

Bài tập tương tự: Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ $AB = 5km$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $7km$. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc $4\ km/h$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6\ km/h$. Xác định vị trí của điểm M để người đó đi đến kho nhanh nhất?

Hướng dẫn giải



Đặt $x = BM\ (km)$.

Điều kiện: $0 \le x \le 7$.

Suy ra quãng đường $AM = \sqrt{25 + x^2}$ và quãng đường $MC = 7 - x$.

Thời gian người canh hải đăng chèo đò đi từ A đến M là $t_{AM} = \dfrac{\sqrt{25 + x^2}}{4}$.

Thời gian người canh hải đăng đi bộ từ M đến C là $t_{MC} = \dfrac{7 - x}{6}$.

Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là $t = t_{AM} + t_{MC} = \dfrac{\sqrt{25 + x^2}}{4} + \dfrac{7 - x}{6}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{25 + x^2}}{4} + \dfrac{7 - x}{6}$ trên đoạn $[0;7]$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ với $x \in [0;7]$

[redacted]

Vậy giá trị nhỏ nhất của t tại điểm M cách B một khoảng $x = 2\sqrt{5}\text{km} \approx 4{,}472\text{km}$.

Bài toán 18. Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu tiêu phí hết số tiền là x (triệu đồng) vào việc quảng cáo. Biết rằng N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N(x) = -x^2 + 30x + 6, 0 \le x \le 30$. Hãy tìm số lô hàng lớn nhất mà công ty có thể bán sau đợt quảng cáo và số tiền đã dành cho việc quảng cao đó?

Hướng dẫn giải.

[redacted]

Vậy, nếu công ty dành 15 triệu cho việc quảng cáo thì công ty sẽ bán được nhiều nhất là 231 lô hàng.

■ **Bình luận:** ***Ta có thể sử dụng tam thức bậc hai*** $N(x)=231-(x-15)^2\le 231,\forall x\in[0;30]$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=15$.

Do bài toán đã cho sẵn hàm nên ta không quá khó để vận dụng đạo hàm tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên. Tuy nhiên với các bài toán cần phải có một bước thiết lập hàm thì không dễ chút nào. Các bài toán tiếp theo bạn đọc sẽ thấy rõ hơn.

Bài tập tương tự 1: Một công ty xác định rằng tổng thu nhập (tính bằng USD) từ việc sản xuất và bán x đơn vị sản phẩm được cho bởi công thức: $P(x)=\dfrac{150000}{x^2-60x+1000}$.

Hãy tìm số x đơn vị sản phẩm cần sản xuất và bán để tổng thu nhập lớn nhất ?

Hướng dẫn giải

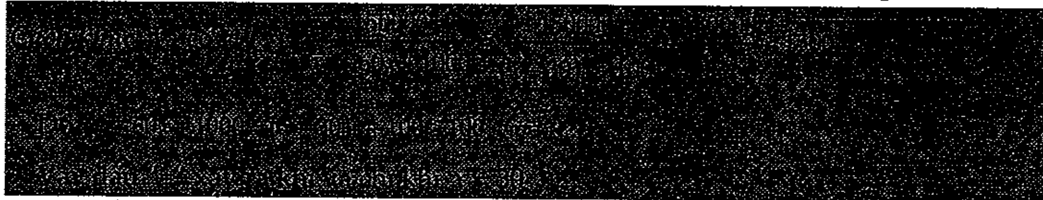
Ta có $P(x)=\dfrac{150000}{x^2-60x+1000}\Rightarrow P'(x)=\dfrac{-150000(2x-60)}{(x^2-60x+1000)^2},\forall x\in\mathbb{R}$

$P'(x)=0\Leftrightarrow x=30$. Lập bảng biến thiên ta có:

X	$-\infty$		30		$+\infty$
$P'(x)$		+	0	–	
$P(x)$		↗	1500	↘	

Từ bảng biến thiên, ta có $max P(x)=1500\Leftrightarrow x=30$.

Vậy, để tổng thu nhập lớn nhất thì cần sản xuất và bán 30 đơn vị sản phẩm.


[redacted]

Bài tập tương tự 2: Một công ty đang lập kế hoạch cải tiến sản phẩm và xác định rằng tổng chi phí dành cho việc cải tiến là $C(x)=2x+4+\dfrac{2}{x-6}(x>6)$ với x là số sản phẩm được cải tiến. Tìm số sản phẩm mà công ty cần cải tiến để tổng chi phí thấp nhất?

Hướng dẫn giải

Ta có $C(x)=2x+4+\dfrac{2}{x-6}\Rightarrow C'(x)=2-\dfrac{2}{(x-6)^2}\Rightarrow C'(x)=0\Leftrightarrow(x-6)^2=1$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-6=1\\x-6=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7\\x=5\end{array}\right.$. Do $x>6$ nên loại $x=5$. Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	6		7		$+\infty$
$C'(x)$			–	0	+	
$C(x)$			↘	20	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $minC=20\Leftrightarrow x=7$

Lưu ý: Để xét dấu các khoảng của $C'(x)$, ngoài việc sử dụng dấu của tam thức bậc hai thông thường ta có thể "trong vùng của số, chọn số thế vào, nếu ra số dương thì ghi + và ngược lại".

Bài toán 19. Doanh nghiệp tư nhân Tân Hưng Yên chuyên kinh doanh xe gắn máy và tay ga các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe tay ga Lead với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán với giá 40 (triệu đồng) mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua là 2.000 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra sẽ tăng thêm 800 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện việc giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

■ **Phân tích:**

- *Ta có thể thử mô tả bài toán bằng bảng sau:*

	Giá mua vào 1 chiếc xe	*Giá bán ra 1 chiếc xe*	*Lợi nhuận Khi bán 1 chiếc xe*	*Số lượng*	*Tổng lợi nhuận*
Ban đầu	*27 (triệu đồng)*	*40 (triệu đồng)*	*13 triệu đồng*	*2.000 chiếc*	*26 tỷ*

Như vậy việc giảm giá bán trên 1 chiếc xe sẽ làm giảm lợi nhuận thu được khi bán 1 chiếc nhưng đồng thời cũng làm tăng lên nhu cầu mua xe của khách hàng. Theo giả thiết nếu giảm giá 1 (triệu đồng) thì số lượng xe bán ra sẽ tăng thêm 800 chiếc.

- *Từ đây nếu ta gọi x là giá bán mới của mỗi chiếc Lead . Ta thấy rằng giá bán chỉ có thể dao động trong khoảng 27 triệu đồng đến 40 triệu đồng.*
- *Ta xác định lại số lượng xe bán ra sau khi giảm giá ứng với giá bán mới là x.*

Khi đó lợi nhuận của doanh nghiệp sẽ bằng tổng doanh thu – Tổng chi phí và là một hàm phụ thuộc theo biến x. Ứng dụng đạo hàm ta sẽ tìm được giá trị x thỏa yêu cầu bài toán.

Hướng dẫn giải.

Gọi x là giá bán mới của mỗi chiếc Lead mà doanh nghiệp phải xác định để lợi nhuận thu được sau khi giảm giá là cao nhất. $(27 < x < 40)$

Suy ra số tiền đã giảm là $40 - x$. Đồng thời số lượng xe tăng lên $800(40 - x)$.

Vậy tổng số sản phẩm bán được là $2.000 + 800(40 - x) = 34.000 - 800x$

Doanh thu mà doanh nghiệp sẽ đạt được sẽ là $(34.000 - 800x)x$

Chi phí mà doanh nghiệp phải bỏ ra là $(34000 - 800x).27$

Lợi nhuận mà công ty đạt được = Tổng doanh thu – chi phí

$\Rightarrow (34.000 - 800x)x - (34.000 - 800x).27 = -800x^2 + 55.600x - 918.000$

Đặt $f(x) = -800x^2 + 55.600x - 91.8000$. Bài toán trở thành tìm $\max_{27<x<40} f(x) = ?$

Ta có $f'(x) = -1.600x + 55.600, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{139}{4} \approx 34{,}75$ triệu đồng.

Lập bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{27<x<40} f(x) = f\left(\dfrac{139}{4}\right) = 48.050$ (triệu đồng) hay 48 tỷ và 50 triệu đồng.

■ Bình luận: *trong kinh doanh ta thấy tùy vào từng thời điểm khác nhau, dựa theo nhu cầu của thị trường mà các nhà kinh doanh không ngừng thay đổi chiến lược kinh doanh của mình trong đó có những lúc "đại hạ giá" mà chúng ta vẫn thường quen với tên gọi là "sale off". Với tâm lý thích giá vừa túi tiền nên các ta luôn thấy các bảng hiệu "sale off" (giảm giá) trưng bày trước rất nhiều cửa hiệu. Dĩ nhiên kinh doanh là cả một sự tính toán nhiều biến số thay đổi từng giây, từng phút chứ không hẳn chỉ dựa trên chất lượng tốt của sản phẩm v,v...*

Bài tập tương tự 1: Một nhà sản xuất bóng đèn với giá là 30 USD, tại giá bán này khách hàng sẽ mua 3.000 bóng mỗi tháng. Nhà sản xuất dự định tăng giá bán và họ ước tính rằng cứ giá mà tăng lên 1USD thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 bóng. Biết rằng nhà sản xuất bóng đèn với chi phí 18USD mỗi bóng. Hỏi nhà sản xuất tăng giá bán là bao nhiêu để lợi nhuận là lớn nhất?

Hướng dẫn giải

Gọi x là giá bán mới $(x > 30)$.

Lượng tiền tăng trong giá bán là $x - 30$

Với giá bán mới, lượng bóng đèn bán ra hàng tháng sẽ giảm $100(x-30)$

Số bóng đèn bán hàng tháng theo giá mới là $3.000 - 100(x-30)$

Lợi nhuận mỗi bóng sẽ là $x - 18$

Lợi nhuận thu được hàng tháng là $(x-18)(6.000-100x) = -100x^2 + 7.800x - 10.8000$

Đặt $f(x) = -100x^2 + 7.800x - 10.8000$ với $x > 30$. Bài toán trở thành tìm $\max\limits_{x>30} f(x)$.

Ta có $f'(x) = -200x + 7.800$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 39$ (USD)

Lập bảng biến thiên ta suy ra $\max\limits_{x>30} f(x) = f(39) = 44.100$ USD.

Vậy nhà sản xuất cần bán 39USD/ bóng để đạt được lợi nhuận cao nhất.

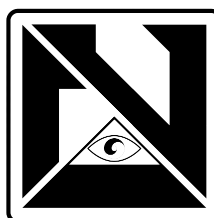
Bài tập tương tự 2: Một công ty nhận sản xuất 400.000 huy chương bạc nhân ngày kỷ niệm lần thứ 30 Apollo 11 đổ bộ lên mặt Trăng. Công ty sở hữu 20 máy, mỗi máy có thể sản xuất 200 huy chương/giờ. Chi phí lắp đặt máy để sản xuất huy chương là 80 USD/máy và tổng chi phí vận hành là 5,76 USD/giờ. Hãy biểu diễn chi phí sản xuất 400.000 huy chương bằng một hàm theo số máy đã dùng. Hãy ước tính số máy mà công ty nên dùng để chi phí nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi x $(1 \le x \le 20, x \in \mathbb{N})$ là số máy sử dụng và $C(x)$ là hàm tổng chi phí sản xuất tương ứng.

Chi phí lắp đặt các máy là $80x$

Chi phí vận hành các máy là $\dfrac{400000}{200x}.5,76$



Tổng chi phí = Chi phí lắp đặt + Chi phí vận hành $\Rightarrow C(x) = 80x + \frac{11520}{x}$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $C(x)$ với $x \in [1;20]$

[redacted]

Vậy công ty nên sử dụng 12 máy để sản xuất thì tổng chi phí sẽ nhỏ nhất.

Bài toán 20. Giám đốc của một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng, nó sẽ quyết định nhà hát thu được lợi nhuận hay bị tổn thất. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, Ông ta xác định rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1.000 người đến xem. Nhưng nếu tăng tiền vé lên thêm 1 USD/người thì sẽ mất đi 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng dành 1,8USD cho việc uống nước trong nhà hát. Hãy giúp Giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất?

■ **Phân tích:**

- *Gọi x là số tiền cần tăng thêm của giá vé vào cửa (20USD).*

  Nếu $x < 0$ thì có nghĩa là ta nên giảm giá vé.

- *Khi đó tổng thu nhập của nhà hát sẽ bao gồm thu nhập từ việc bán vé và bán nước uống. Dĩ nhiên khi tăng giá vé lên thì sẽ tác động đến việc nhu cầu xem phim ở rạp. Và lợi nhuận từ việc bán nước lại phụ thuộc vào số người đi xem.*

Hướng dẫn giải.

Gọi x là số tiền cần tăng thêm của giá vé vào cửa ($20USD$).

[redacted]

$\Leftrightarrow R(x) = -100x^2 - 1180x + 21800$.

***Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số** $R(x)$ **với** $x \in \mathbb{R}$*

[redacted]

Vậy, để tổng thu nhập là lớn nhất, nhà hát nên tính giá tiền mỗi vé là** $20 - 5,9 = 14,1$ **(USD). Giá vé này sẽ hấp dẫn nhiều người đến xem hơn.

Cụ thể $1000 - 100.(-5,9) = 1590$ khách hàng.

Khi đó tổng thu nhập lớn nhất là** 25281 **(USD).

■ **Bình luận:** *Cách khác:* $R(x) = -100x^2 - 1180x + 21800$

$$R(x) = 10x(-10x-118) + 21800 \le \frac{(10x-10x-118)^2}{4} + 21800 = 25281.$$

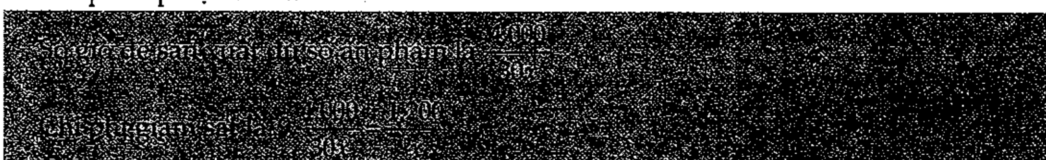
Dấu "=" xảy ra khi $10x = -10x - 118 \Leftrightarrow x = -5,9$.

Bài tập tương tự 1: Một nhà xuất bản nhận in 4.000 ấn phẩm. Nhà xuất bản có tất cả 14 máy in được cài đặt, hoạt động tự động và giám sát bởi 1 kĩ sư. Mỗi máy in có thể in được 30 ấn phẩm trong một giờ. Chi phí cài đặt máy in là 12 USD/máy, chi phí giám sát là 9USD/giờ. Tính số máy in nhà xuất bản nên sử dụng để chi phí in là nhỏ nhất?

Hướng dẫn giải

Gọi x là số máy in mà nhà xuất bản sử dụng $(1 \le x \le 14)$.

Chi phí lắp đặt là $12x$



Chi phí sản xuất = Chi phí lắp đặt + Chi phí giám sát $= 12x + \frac{1.200}{x}$

Đặt $C(x) = 12x + \frac{1200}{x}$. Bài toán trở thành tìm $\min_{x\in[1;14]} C(x) = ?$

Ta có: $C'(x) = 12 - \frac{1200}{x^2}, C'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10 > 0$.

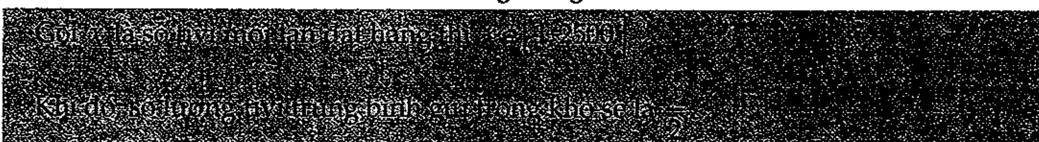
Lập bảng biến thiên, ta được

x	1	20	14
$C'(x)$	−	0	+
$C(x)$	↘	240	↗

Dựa bảng biến thiên ta có: $\min_{x\in[1;14]} C(x) = C(10) = 240USD$

Bài tập tương tự 2: Một cửa hàng bán lẻ bán 2.500 cái tivi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 10USD một cái một năm. Để đặt hàng nhà sản xuất thì mỗi lần chi phí cố định là 20USD, cộng thêm 9USD. Biết rằng số lượng tivi trung bình gửi trong kho bằng một nửa số tivi của mỗi lần đặt hàng. Như vậy cửa hàng nên đặt hàng nhà sản xuất bao nhiêu lần mỗi năm và mỗi lần đặt bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là thấp nhất?

Hướng dẫn giải



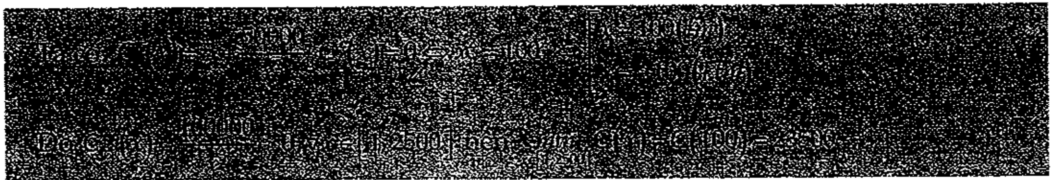
Do đó, chi phí gửi hàng trong khi mỗi năm sẽ là $10.\frac{x}{2} = 5x$.

Số lần đặt hàng mỗi năm sẽ là $\frac{2500}{x}$.

Do đó chi phí đặt hàng mỗi năm sẽ là $(20+9x).\frac{2500}{x}=\frac{50000}{x}+22500$

Suy ra, chi phí hàng tồn kho là $C(x)=5x+\frac{50000}{x}+22500$

***Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của** $C(x)$ **với** $x\in[1;2500]$*


[redacted]

Khi đó số lần đặt hàng mỗi năm sẽ là $\frac{2500}{100}=25$ lần.

Vậy để chi phí hàng tồn kho là nhỏ nhất thì cửa hàng cần đặt hàng 25 lần mỗi năm và 100 cái mỗi lần.

Bài toán 21. Một doanh nghiệp chuyên sản xuất một loại sản phẩm, biết nhu cầu của thị trường và chi phí của loại sản phẩm này lần lượt là $Q=5000-\frac{P}{3}$, $C(Q)=Q^2+2200Q+500$, trong đó Q là số sản phẩm và P là giá bán của một sản phẩm. Hãy xác định mức thuế t cần định trên một đơn vị sản phẩm sản xuất ra sao cho thu được lợi nhuận là cao nhất.

■ **Phân tích:** *ta có thể tổng quát bài toán như sau*

- *Giả sử một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm có hàm cầu trong một đơn vị thời gian là $Q=Q(P)$ và hàm chi phí sản xuất trong một đơn vị thời gian là $C=C(Q)$. Xác định mức thuế trên một đơn vị sản phẩm của xí nghiệp để thu được nhiều thuế nhất.*
- ***Phương pháp giải:** Giả sử mức thuế trên một đơn vị sản phẩm là $t>0$.*

  Ta có $Q=Q(P)\Rightarrow P=P(Q)$

  Lợi nhuận của xí nghiệp là $N=Q.P(Q)-C(Q)-Q.t$

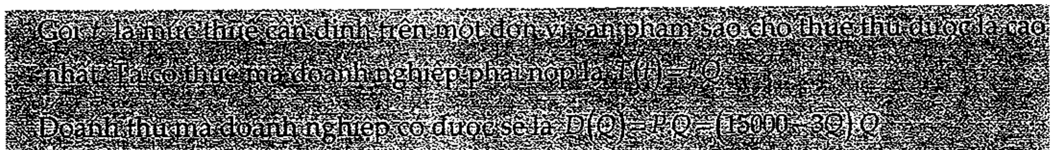
  Xí nghiệp sẽ sản xuất ở mức $Q=Q(t)$ để $N(Q)$ đạt giá trị lớn nhất.

  Do đó thuế thu được sẽ là $T=t.Q(t)$ từ đây ta xác định t để T_{max}

Hướng dẫn giải.

Gọi Q là số sản phẩm mà doanh nghiệp cần sản xuất

Khi ấy ta có $Q=5000-\frac{P}{3}\Rightarrow P=15000-3Q$


[redacted]

Suy ra lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được sẽ là: $L(Q)=D(Q)-C(Q)-T(t)$

$\Rightarrow L(Q)=(15000-3Q)Q-(Q^2+2200Q+500)-tQ=-4Q^2+12800Q-500-tQ$

Để công ty nộp thuế cao nhất trước hết lợi nhuận thu được của doanh nhiệp là cao nhất khi đó ta cần $\begin{cases} L'(Q)=0 \\ L''(Q)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8Q+12800-t=0 \\ -8<0 \end{cases} \Leftrightarrow Q=1600-\frac{1}{8}t$

[redacted]

Với mức thuế $t = 6400$ (đơn vị tiền tệ) cho 1 đơn vị sản phẩm thì doanh nghiệp sẽ thu được lợi nhuận cao nhất là $L(800)=2559500$.

■ **Bình luận:** *Trong thực tế, thì tùy vào các mặt hàng sản xuất từ xuất khẩu đến nhập khẩu mà có thể chịu các loại thuế khác nhau. Trên đây chỉ là 1 tình huống ta xét tương ứng với mức thuế cần định cho sản phẩm để đạt được lợi nhuận cao nhất.*

Bài tập tương tự 1: Giả sử một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm có hàm cầu trong một đơn vị thời gian là $Q = 300 - P$ và hàm chi phí sản xuất trong một đơn vị thời gian là $C(Q)=Q^2+100Q+10$.

a. Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để tổng lợi nhuận và tổng thuế chính phủ thu được đạt giá trị cực đại?

b. Muốn xí nghiệp sản xuất ít nhất là 40 sản phẩm thì mức thuế thu trên mỗi đơn vị sản phẩm là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có $Q=300-P \Leftrightarrow P=300-Q>0 \Rightarrow Q<300$

Doanh thu của xí nghiệp là $R(Q)=Q.P(Q)=300Q-Q^2$

Thuế của xí nghiệp là $t.Q$

[redacted]

Do đó thuế thu được là $T=Q.t=\frac{200-t}{4}t=-\frac{t^2}{4}+50t$

$T'(t)=-\frac{t}{2}+50, T'(t)=0 \Leftrightarrow t=100$

Với mức thuế $t=100$ thì xí nghiệp sẽ sản xuất được $Q=\frac{200-100}{4}=25$ sản phẩm trong một đơn vị thời gian.

Muốn xí nghiệp sản xuất ít nhất 40 sản phẩm thì $Q=\frac{200-t}{4}\geq 40 \Leftrightarrow t\leq 40$

Nghĩa là cần chọn mức thuế tối đa là 40 cho một đơn vị sản phẩm.

Bài tập tương tự 2: Một nhà máy sản xuất máy tính vừa làm ra x sản phẩm mới và bán với giá là $p = 1000 - x$ (USD) cho mỗi sản phẩm. Nhà sản xuất xác định rằng tổng chi phí làm ra x sản phẩm là $C(x) = 3000 + 20x$ (USD).

a. Hãy xác định tổng thu nhập $R(x)$ và tổng lợi nhuận $P(x)$ của nhà máy?

b. Nhà máy phải sản xuất và bán bao nhiêu sản phẩm và giá bán mỗi sản phẩm là bao nhiêu để lợi nhuận là lớn nhất?

Hướng dẫn giải

a. $R(x) = x(1000 - x) = 1000x - x^2$ và $P(x) = R(x) - C(x) = -x^2 + 980x - 3000$

[redacted]

Cách khác $P(x) = -x^2 + 980x - 3000 = 237100 - (x - 490)^2 \le 237100$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 490$.

Bài toán 22 (Ứng dụng trong Sinh học). Trong một môi trường dinh dưỡng có 1000 vi khuẩn được cấy vào. Bằng thực nghiệm xác định được số lượng vi khuẩn tăng theo thời gian bởi qui luật $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}$ (con vi khuẩn), trong đó t là thời gian (đơn vị giây)). Hãy xác định thời điểm sau khi thực hiện cấy vi khuẩn vào, số lượng vi khuẩn tăng lên là lớn nhất?

■ **Phân tích:**

• *Tương tự như những bài toán trước, do đề bài đã mô hình hóa bài toán dưới dạng hàm nên ta chỉ cần vận dụng kiến thức đạo hàm là có thể tìm được số lượng tăng nhanh nhất của vi khuẩn.*

Hướng dẫn giải.

[redacted]

Xét $N'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Leftrightarrow t = 10 > 0$.

Lập bảng biến thiên ta được:

t	0		10		$+\infty$
$N'(t)$	0	+	0	–	
$N(t)$		↗	1005	↘	

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $\max N(t) = N(10) = 1005$.

■ **Bình luận:** *Ngoài ra ta cũng có thể làm như sau*

$$N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2} = 100 + \frac{100}{\frac{100}{t} + t} \le 1000 + \frac{100}{2.10} = 1005$$

do $\frac{100}{t}+t \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{\frac{100}{t}.t}=20$. *Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi* $\frac{100}{t}=t \Leftrightarrow t=10$

Bài tập tương tự 1: Giả sử $n=f(t)=n_o.2^t$ là số lượng cá thể trong một đám vi khuẩn tại thời điểm t, n_o là số lượng cá thể lúc ban đầu. Khi đó tốc độ phát triển về số lượng của vi khuẩn tại thời điểm t chính là $f'(t)$. Giả sử mẫu thử ban đầu của ta có $n_o=100$ vi khuẩn. Vậy tốc độ phát triển sau 4 giờ sẽ là bao nhiêu con vi khuẩn?

A. 1109. B. 1600. C. 6400. D. 4436.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(t)=n_o 2^t ln2 \xrightarrow{n_o=100} f'(4)=100.2^4 ln2 \approx 1109$ con vi khuẩn.

Bài tập tương tự 2: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $Q(n)=480-20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

Hướng dẫn giải

[redacted]

n	0	12	$+\infty$
$P'(n)$	+	0	−
$P(n)$	↗	2880	↘

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $\max_{n>0} P(n)=P(12)=2880$.

[redacted]

Bài toán 23 (Ứng dụng trong Hóa học). Đốt cháy các hidrocacbon của dãy đồng đẳng nào dưới đây thì tỉ lệ mol H_2O : mol CO_2 giảm dần khi số cacbon tăng dần?

A. Ankan B. Anken. C. Ankin. D. Ankylbenzen

■ **Phân tích:**

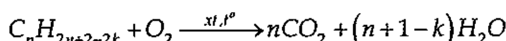
- *Để làm được bài này, ta cần có hiểu biết về kiến thức về chương Hidrocabon đã học ở chương trình hóa lớp 9 hoặc hóa lớp 11.*
- *Từ đây ta thiết lập công thức tổng quát của 1 hidrocacbon là* $C_nH_{2n+2-2k}$
- *Sau đó thực hiện phản ứng cháy* $C_nH_{2n+2-2k}+O_2 \xrightarrow{xt,t^o} nCO_2+(n+1-k)H_2O$

Đến đây ta thấy được tỉ lệ mol giữa nước và khí cacbonic sinh ra chính là $\frac{n_{H_2O}}{n_{CO_2}}=\frac{n+1-k}{n}$.

Tới đây ta có thể xét hàm $f(n)=\frac{n+1-k}{n}, n\in N^*$. *Khảo sát và tìm điều kiện của k (chính là số liên kết* π*)*

Hướng dẫn giải.

Công thức tổng quát của một hidrocacbon là $C_nH_{2n+2-2k}$ với k là số liên kết π trong phân tử. Phương trình phản ứng cháy là:



$C_nH_{2n+2-2k} + O_2 \xrightarrow{xt,t^o} nCO_2 + (n+1-k)H_2O$

Ta có $\frac{n_{H_2O}}{n_{CO_2}} = \frac{n+1-k}{n}$. Xét hàm số $f(n) = \frac{n+1-k}{n}, n \in N^*$

Ta có $f'(n) = \frac{k-1}{n^2}$. Theo giả thiết ta có $f(n)$ là hàm nghịch biến nên $f'(n) < 0$

$\Leftrightarrow \frac{k-1}{n^2} < 0 \Leftrightarrow k-1 < 0 \Leftrightarrow k < 1 \xrightarrow{k \in N} k = 0 \Rightarrow CTTQ: C_nH_{2n+2}$: *ankan*

■ **Bình luận:** *Việc vận dụng kiến thức liên môn kết hợp với nhau, góp phần giúp cho bài toán Hóa trở nên dễ dàng hơn khi có công cụ Toán học hỗ trợ, ngược lại ta cũng tìm thấy được những ứng dụng của Toán học trong quá trình tìm hiểu các môn học khác, điều này góp phần củng cố, khắc sâu tri thức mà ta lĩnh hội được khi học.*

Bài tập tương tự : Cho phương trình phản ứng tạo thành Nitơ (IV) Oxit từ Nitơ đioxit và Oxy là $2NO + O_2 \xrightleftharpoons{dk,t^o,xt} 2NO_2$. Biết rằng đây là một phản ứng thuận nghịch. Giả sử x, y lần lượt là nồng độ phần trăm của khí NO và O_2 tham gia phản ứng. Biết rằng tốc độ phản ứng hóa học của phản ứng trên được xác định $v = kx^2y$, với k là hằng số của tốc độ phản ứng. Để tốc độ phản ứng xảy ra nhanh nhất thì tỉ số giữa $\frac{x}{y}$ là?

A. $\frac{1}{2}$. B. 2. C. $\frac{1}{3}$. D. 3.

Hướng dẫn giải

[redacted]

Ta có: $f'(x) = k\left[200x - 3x^2\right], f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\,(ktm) \\ x = \frac{200}{3} \in (0;100) \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta có:

x	0		$\frac{200}{3}$		100
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$		↗	$f\left(\frac{200}{3}\right)$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\max\limits_{x \in (0;100)} f(x) = f\left(\frac{200}{3}\right)$

Và do đó ta có $y = 100 - x = \frac{100}{3} \Rightarrow \frac{x}{y} = 2$

Bài toán 23 (Ứng dụng trong Y Học). Độ giảm huyết áp của bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ với x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x: miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất và tính độ giảm?

■ **Phân tích:**

- *Tương tự như những bài toán đã cho sẵn hàm số, thì việc ứng dụng đạo hàm không còn quá khó khăn nữa.*

Hướng dẫn giải.

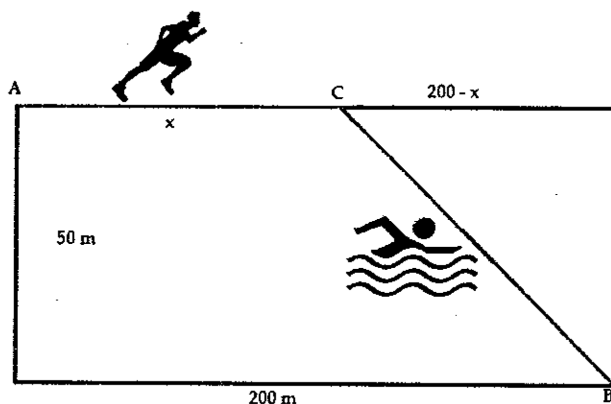
[redacted]

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0		20		$+\infty$
$G'(x)$	‖	+	0	−	‖
$G(x)$	‖	↗	100	↘	‖

Dựa vào bảng biến thiên ta có $max\, G(x) = 100 \Leftrightarrow x = 20$

Bài toán 24 (Ứng dụng trong thể thao). Trong nội dung thi điền kinh và bơi lội phối hợp được diễn ra tại một hồ bơi có chiều rộng 50m và chiều dài 200m. Một vận động viên cần chạy phối hợp với bơi (bắt buộc cả hai) khi phải thực hiện lộ trình xuất phát từ A đến B như hình vẽ. Hỏi rằng sau khi chạy được bao xa (quãng đường x) thì vận động viên nên nhảy xuống để tiếp tục bơi về đích nhanh nhất ? Biết rằng vận tốc của vận động viên khi chạy trên bờ và khi bơi lần lượt là 4,5 m/s và 1,5 m/s.



■ **Phân tích:**

- *Với lộ trình đã vạch sẵn như hình vẽ, ta thấy, cùng với chiều rộng và chiều dài của hồ bơi, ta nhận thấy tổng quãng đường vận động viên đó phải đi sẽ là AC + CB*
- *Giả sử đặt AC = x (x > 0). Khi đó ta nhận thấy để tính quãng đường bơi từ C đến B thì phải dựa vào chiều rộng của hồ, và quãng đường còn lại nếu vận động viên đi dọc theo bờ hồ.*

- *Do vận tốc trên bộ và dưới nước là khác nhau nên thời gian di chuyển cũng khác nhau. Việc xác định x thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta có thể sử dụng ứng dụng của đạo hàm.*

Hướng dẫn giải.

Gọi C là vị trí mà vận động viên kết thúc phần chạy điền kinh và $AC = x(0 < x < 200)$

[redacted]

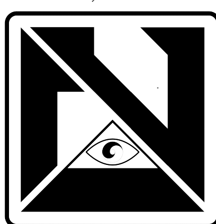
Tổng thời gian của vận động viên sẽ là $T = t_1 + t_2 = \dfrac{x}{4,5} + \dfrac{\sqrt{50^2 + (200-x)^2}}{1,5}$

Xét hàm $f(x) = \dfrac{x}{4,5} + \dfrac{\sqrt{50^2 + (200-x)^2}}{1,5}, 0 < x < 200$

Bài toán trở thành tìm $\min\limits_{x\in(0;200)} f(x) = ?$

[redacted]

Lập bảng biến thiên ta có



x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{x\in(0;200)} f(x) = f\left(\dfrac{400-25\sqrt{2}}{2}\right) \approx 75,87s$

■ **Bình luận:** *Một lần nữa việc vận dụng đạo hàm đã giúp ta tối ưu hóa bài toán thời gian cho vận động viên trên. Ta tự hỏi thực tế mô hình trên liệu có thực ?*

Tìm hiểu kiến thức khoa học trên wikipedia, ta có thông tin sau:

Ba môn phối hợp (thuật ngữ tiếng Anh: Triathlon) bao gồm chạy bộ, bơi và đua xe đạp. Ban đầu các vận động viên đua bơi lội. Tiếp đó là đua xe đạp tới đường chạy, cuối cùng các vận động viên chạy marathon để về đích.[1][2]

Ba môn phối hợp



Ba môn phối hợp: chạy, bơi và đua xe đạp

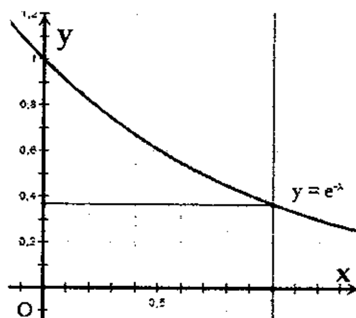
Đây là môn thể thao được chơi ngoài trời và là một môn thể thao mới được chơi tại

Thế Vận Hội từ năm 2000 ở Sydney, Á Vận Hội và thậm chí tại SEA Games.
Ba môn phối hợp đòi hỏi các vận động viên phải có một sức bền cả về thể lực lẫn tinh thần. Đây là môn thể thao thi đấu cá nhân hoặc đồng đội. Môn thể thao này có rất nhiều người tham gia.

Bài toán 25 (Ứng dụng trong kỹ thuật vi tính). Một máy tính được lập trình để vẽ một chuỗi các hình chữ nhật ở góc phần tư thứ nhất của hai trục tọa độ 2 chiều, nội tiếp dưới đường cong $y = e^{-x}$. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật lớn nhất có thể nội tiếp được đường cong trên ?

■ **Phân tích:**

- *Ta có thể mô tả bài toán trên bằng cách vẽ đồ thị hàm $y = e^{-x}$.*
- *Dựa vào hình vẽ, ta nhận thấy.*
  Diện tích của hình chữ nhật chính là $S = xy = x.e^{-x}$
- *Đến đây ta nghĩ đến việc sử dụng đạo hàm để tìm x nào cho chúng ta được tương ứng y thỏa mãn diện tích hình chữ nhật trên là lớn nhất.*



Hướng dẫn giải.

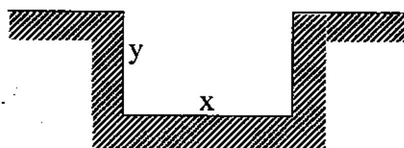
Ta có diện tích hình chữ nhật bằng $S = x.e^{-x}$

Đặt $f(x) = x.e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (1-x)e^{-x}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Đồng thời $f''(x) = -xe^{-x} - (1-x)e^{-x} = -e^{-x} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó ta có $max\, f(x) = f(1) = e^{-1} \approx 0{,}3678$.

Bài toán 26 (Ứng dụng trong Thủy lợi). Trong lĩnh vực thủy lợi, cần phải xây dựng nhiều mương dẫn nước dạng "Thủy động học" (Ký hiệu diện tích tiết diện ngang của mương là S, ℓ là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này, ℓ - đặc trưng cho khả năng thấm nước của mương; mương được gọi là có dạng thủy động học nếu với S xác định, ℓ là nhỏ nhất).
Cần xác định các kích thước của mương dẫn nước như thế nào để có dạng thủy động học? (nếu mương dẫn nước có tiết diện ngang là hình chữ nhật)



Hướng dẫn giải.

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng, chiều cao của mương.

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} S = xy \Rightarrow y = \dfrac{S}{x} \\ l = 2y + x = \dfrac{2S}{x} + x \end{cases}, 0 < y < x$

[redacted]

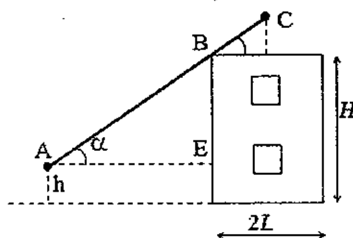
Lập bảng biến ta suy ra $\min\limits_{x>0} f(x) = f\left(\sqrt{2S}\right)$

Do đó mương có dạng thuỷ động học khi kích thước của mương là $\begin{cases} x = \sqrt{2S} \\ y = \sqrt{\dfrac{S}{2}} \end{cases}$

Cách khác: $l = 2y + x = \dfrac{2S}{x} + x \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{\dfrac{2S}{x}.x} = 2\sqrt{2S}$.

Dấu "=" xảy ra $\dfrac{2S}{x} = x \Rightarrow x = \sqrt{2S}$.

Bài toán 27 (Ứng dụng trong xây dựng). Hãy xác định độ dài ngắn nhất cánh tay nâng của cần cẩu bánh hơi có thể dùng được để xây dựng tòa nhà cao tầng mái bằng có chiều cao H và chiều rộng 2ℓ? (Biết rằng cần cẩu thỏa mãn yêu cầu sau đây: Có thể xê xích chiếc cẩu cũng như góc nghiêng của cánh tay nâng để sao cho điểm cuối của cánh tay nâng chiếu xuống theo phương thẳng đứng thì trùng với trung điểm của bề rộng (Hình vẽ). Ta giả sử ngôi nhà xây dựng trên miếng đất rộng, cần cẩu có thể di chuyển thoải mái.



Hướng dẫn giải.

Gọi h là khoảng cách tính từ mặt đất đến đầu dưới của cánh tay cần cẩu $(0 < h < H)$

Gọi α, A, B, C, E là các kí hiệu như hình vẽ.

Khi đó cánh tay cần cẩu là $AC = AB + BC = \dfrac{H-h}{\sin\alpha} + \dfrac{l}{\cos\alpha}$ với $0 < \alpha < 90^0$

Đặt $f(\alpha) = \dfrac{H-h}{\sin\alpha} + \dfrac{l}{\cos\alpha}$. Bài toán trở thành tìm $\min f(\alpha)$.

Ta có: $f'(\alpha) = (H-h)\dfrac{-\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + l\dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{l\sin^3\alpha - (H-h)\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

Cho $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow tan^3\alpha = \dfrac{H-h}{l} > 0 \Leftrightarrow tan\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{H-h}{l}} = k > 0$

Lập bảng biến thiên ta có

α	0		arctan k		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		−	0	+	
$f(\alpha)$		↘	5	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min_{\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)} f(\alpha) = f(arctan k) = (H-h)\sqrt{k^2+1} + l\sqrt{\dfrac{1}{k^2}+1}$

Như vậy, ta vừa điểm qua một loạt các bài toán ứng dụng đạo hàm trong thực tế. Có thể thấy ngoài những lĩnh vực trên, vẫn còn nhiều lĩnh vực khác nữa cần đến kiến thức của đạo hàm trong giải quyết các bài toán tối ưu của chúng. Để góp phần củng cố và giới thiệu nhiều bài toán hay khác cũng như tiếp cận với hình thức thi trắc nghiệm của Bộ Giáo dục và Đào tạo trong kì thi THPT sắp tới, nhóm tác giả thiết kế thêm bài tập trắc nghiệm tiếp sau đây để bạn đọc có dịp làm quen và nâng cao kỹ năng khi tiếp cận với các bài toán thực tế đó.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

Câu 1. Nhiệt độ T của một người trong cơn bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$ $(0 \le t \le 11)$, trong đó T là nhiệt độ $\left({}^oF - Fahrenheit\right)$ theo thời gian t trong ngày. Biết rằng ${}^oC = \dfrac{{}^oF - 32}{1,8}$, độ chênh lệch (theo độ ${}^0C$) giữa nhiệt độ lớn nhất và nhiệt độ thấp nhất trong một ngày là

A. $3,6^0C$. **B.** 2^0C. **C.** $2,6^0C$. **D.** $2,5^0C$.

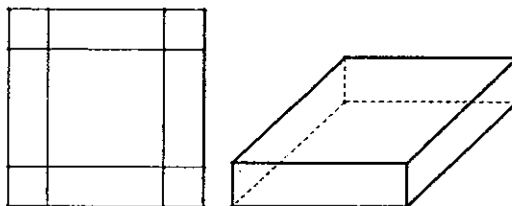
[redacted]

Câu 3. Người ta muốn mạ vàng cho một cái hộp có đáy là hình vuông, không nắp, thể tích hộp là 4 lít. Giả sử độ dày của lớp mạ tại mọi điểm trên hộp là như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của khối hộp lần lượt x, y. Giá trị của x, y để lượng vàng cần dùng nhỏ nhất là:

A. $x = \sqrt[3]{4}, y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{16}}$. **B.** $x = 2, y = 1$.

C. $x = \sqrt[3]{12}, y = \dfrac{12}{\sqrt[3]{144}}$. **D.** $x = \sqrt[3]{24}, y = \dfrac{12}{\sqrt[3]{576}}$.

Câu 4. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a như hình vẽ. Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Để thể tích của khối hộp là lớn nhất thì cạnh của hình vuông bị cắt ra bằng:



A. $\dfrac{a}{6}$. **B.** $\dfrac{a}{8}$. **C.** $\dfrac{a}{12}$. **D.** $\dfrac{a}{24}$.

[redacted]

Câu 6. Một hình nón có bán kính đáy bằng 6cm và chiều cao 9cm. Tính thể tích lớn nhất của khối trụ nội tiếp trong hình nón?

A. $V = 36\pi^2\left(cm^3\right)$. **B.** $V = 54\pi^2\left(cm^3\right)$. **C.** $V = 48\pi^2\left(cm^3\right)$. **D.** $V = \dfrac{81}{2}\pi^2\left(cm^3\right)$.

Câu 7. Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất thì tỉ số $\dfrac{a}{r}$ nào sau đây đúng?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 8. Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/m². Hãy xác định kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất và chi phí đó là

A. 74 triệu đồng. **B.** 75 triệu đồng. **C.** 76 triệu đồng. **D.** 77 triệu đồng.

Câu 9. Một công ty Container cần thiết kế các thùng đựng hàng hình hộp chữ nhật, không nắp, có đáy là hình vuông, thể tích là 108 m^3. Để tốn ít nguyên vật liệu nhất thì ta cần thiết kế các cạnh đáy của hình hộp bằng

A. 4 cm. **B.** 3 cm. **C.** 6 cm. **D.** 2 cm.

Câu 10. Một cửa hàng bán sản phẩm với giá 10 USD. Với giá bán này, cửa hàng bán được khoảng 25 sản phẩm. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 2USD thì số sản phẩm bán được tăng thêm 40 sản phẩm. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá mua về của một sản phẩm là 5USD.

A. $\frac{65}{8}$ USD. **B.** $\frac{63}{8}$ USD. **C.** $\frac{67}{8}$ USD. **D.** $\frac{61}{8}$ USD.

Câu 11. Công ty du lịch Ban Mê Tourist dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất?

A. 1.875.000 (đồng). **B.** 1.375.000 (đồng).

C. 1.675.000 (đồng). **D.** 1.475.000 (đồng).

Câu 12. Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỷ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi v = 10 km/h thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?

A. 25 km/h. **B.** 15 km/h. **C.** 20 km/h. **D.** 30 km/h.

Câu 13. Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t)=\frac{1}{100}\left(30t^3-\frac{t^4}{4}\right)$ $(0\le t\le 90)$. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $f(t)=V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào *đúng*?

A. Tốc độ bơm giảm từ phút thứ 60 đến phút thứ 90.

B. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.

C. Tốc độ bơm luôn giảm.

D. Tốc độ bơm luôn tăng.

Câu 14. Một cái gương có hình dạng như trong hình bên. Phần dưới của gương là một hình chữ nhật và phần trên là một nửa hình tròn. Biết rằng chu vi của gương là P, bán kính của nửa hình tròn sao cho gương có diện tích lớn nhất là

A. $\frac{P}{\pi+2}$. **B.** $\frac{P}{\pi+3}$. **C.** $\frac{P}{\pi+4}$. **D.** $\frac{P}{\pi+6}$.

Câu 15. Công ty A chuyên sản xuất một loại sản phẩm và ước tính rằng với q sản phẩm được sản xuất thì tổng chi phí sẽ là $C(q)=3q^2+72q-9789$ (đơn vị tiền tệ). Giá

mỗi sản phẩm công ty sẽ bán với giá $p(q) = 180 - 3q$. Hãy xác định số sản phẩm công ty cần sản xuất sao cho công ty thu được lợi nhuận cao nhất?

A. 8. **B.** 9 . **C.** 10. **D.** 11.

[redacted]

Câu 17. Người ta muốn làm một cái hộp hình chữ nhật không có nắp có chiều dài đáy gấp đôi chiều rộng và có thể tích $10\ cm^3$. Giả sử giá tiền vật liệu làm đáy thùng là 10.000VNĐ/m^2 và vật liệu làm mặt bên là 5000 VNĐ/m^2. Để chi phí làm thùng nhỏ nhất thì chiều rộng của hình hộp khi đó bằng:

A. $\sqrt[3]{15}$. **B.** $\sqrt[3]{30}$. **C.** $\sqrt[3]{\frac{15}{2}}$. **D.** $\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$.

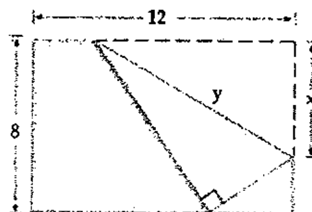
Câu 18. Giả sử rằng mối quan hệ giữa nhu cầu thị trường và sản lượng gạo của doanh nghiệp X được cho theo hàm $Q_D = 656 - \frac{1}{2}P$; Q_D là lượng gạo thị trường cần và P là giá bán cho một tấn gạo. Lại biết chi phí cho việc sản xuất được cho theo hàm $C(Q) = Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 100$; C là chi phí doanh nghiệp X bỏ ra, Q (tấn) là lượng gạo sản xuất được trong một đơn vị thời gian. Để đạt lợi nhuận cao nhất thì doanh nghiệp X cần sản xuất lượng gạo gần với giá trị nào nhất sau đây?

A. 51 (tấn). **B.** 52 (tấn). **C.** 2 (tấn). **D.** 3 (tấn).

Câu 19. Một khách sạn có 50 phòng. Người quản lí tính rằng nếu mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì tất cả các phòng đều thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Hỏi người quản lí phải quyết định giá phòng là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất?

A. 440 ngàn đồng. **B.** 450 ngàn đồng.
C. 430 ngàn đồng. **D.** 460 ngàn đồng.

Câu 20. Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12cm và chiều rộng 8cm. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm dưới đáy như hình vẽ. Để độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?



A. $6\sqrt{15} - 6\sqrt{3}$ cm. **B.** $6\sqrt{3}$ cm.
C. $18 - 6\sqrt{5}$ cm. **D.** 6 cm.

Câu 21. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 36 cm. Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau rồi gặp tấm nhôm lại để được một cái hộp chữ nhật không nắp. Tính cạnh của các hình vuông được cắt bỏ sao cho thể tích của khối hộp đó lớn nhất?

A. 9 cm. **B.** 4 cm. **C.** 8 cm. **D.** 6 cm.

Câu 22. Một công ty chuyên sản xuất đĩa *CD* với chi phí mỗi đĩa là 40 (ngàn đồng). Nếu mỗi đĩa giá bán là x (ngàn đồng) thì số lượng đĩa bán được sẽ là $q(x) = 120 - x$. Hãy xác định giá bán của mỗi đĩa sao cho lợi nhuận mà công ty thu được là cao nhất ?

A. 60 ngàn đồng. **B.** 70 ngàn đồng. **C.** 80 ngàn đồng. **D.** 90 ngàn đồng.

Câu 23. Một ngọn Hải đăng tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 9\ km$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $12\ km$. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến một điểm M trên bờ biển với vận tốc $4\ km/h$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $8 km/h$. Xác định khoảng cách x từ M đến B để người canh hải đăng đến kho nhanh nhất?

A. $x = \sqrt{3}\ km$. **B.** $x = 2\sqrt{3}\ km$. **C.** $x = 3\sqrt{3}\ km$. **D.** $x = 4\sqrt{3}\ km$.

[redacted]

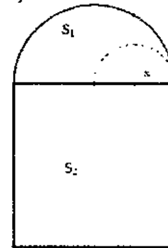
Câu 25. Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là a mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào. Vậy để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất thì giá trị lớn nhất đó tính theo a bằng

A. $\frac{a^2}{4}\left(m^2\right)$. **B.** $\frac{a^2}{12}\left(m^2\right)$. **C.** $\frac{a^2}{6}\left(m^2\right)$. **D.** $\frac{a^2}{8}\left(m^2\right)$.

Câu 26. Một vật được ném lên trời xuyên góc α so với phương nằm ngang, vận tốc ban đầu $v_0 = 9\ m/s$. Biết rằng gia tốc rơi tự do là $g = 10 m/s^2$. Xác định góc α để tầm ném cực đại.

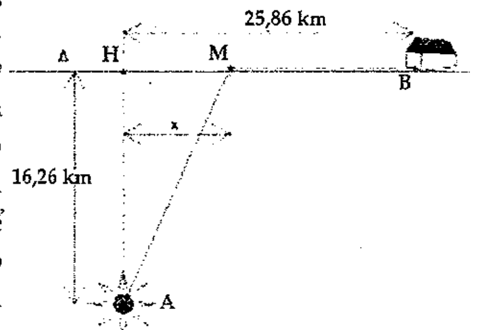
A. $\alpha = 45^0$. **B.** $\alpha = 60^0$.

C. $\alpha = 30^0$. **D.** $\alpha = 75^0$.



[redacted]

Câu 28. Một nhân viên gác ở trạm hải đăng trên biển (điểm A) cách bờ biển 16,28 km, muốn vào đất liền để đến ngôi nhà bên bờ biển (điểm B) bằng phương tiện ca nô với vận tốc 8 km/h cập bờ sau đó đi tiếp bằng xe đạp với vận tốc 12 km/h. Hỏi ca nô phải cập bờ tại điểm M cách B một khoảng là bao nhiêu để thời gian dành cho lộ trình di chuyển là nhỏ nhất? (giả thiết rằng thời tiết tốt, độ dạt của ca nô khi di chuyển là không đáng kể).

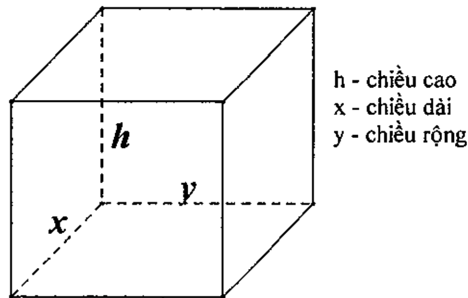


A. $BM = 9,6\ km$. **B.** $BM = 11,14\ km$ **C.** $BM = 10,12\ km$ **D.** $BM = 9,6\ km$.

Câu 29. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t)=\frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng trưởng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,048 nghìn người/ năm? (Trích đề thi thử lần 1, k2pi.net.vn)

A. 2014. **B.** 2016 **C.** 2015 **D.** 2017.

Câu 30. Cần phải xây dựng một hố ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 3(m^3). Tỉ số giữa chiều cao của hố (h) và chiều rộng của đáy (y) bằng 4. Biết rằng hố ga chỉ có các mặt bên và mặt đáy (tức không có mặt trên). Chiều dài của đáy (x) gần nhất với giá trị nào ở dưới để người thợ tốn ít nguyên vật liệu để xây hố ga. (trích đề kiểm tra chất lượng số 8 – THPT Quảng xương 1 – Thanh Hóa)



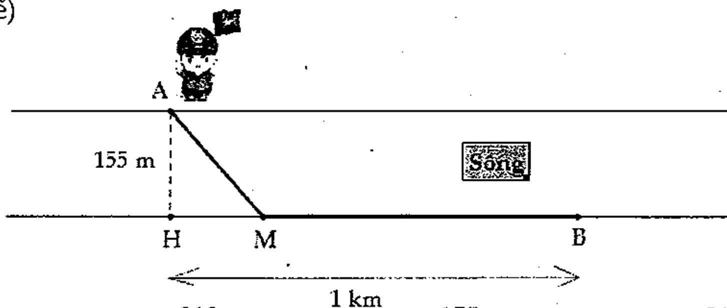
A. 1 m. **B.** 1,5 m. **C.** 2 m. **D.** 2,5 m.

[redacted]

Câu 32. Trong giai đoạn từ năm 1980 đến năm 1994, tỉ lệ phần trăm những hộ gia đình ở Mỹ có ít nhất một đầu máy video (VCR) đã được mô hình hóa bởi hàm số sau: $V(t)=\frac{75}{1+74.e^{-0,6t}}$ trong đó t là thời gian được tính bằng năm $0\le t\le 14$. Thời điểm mà con số VCR tăng nhanh nhất gần với giá trị nào nhất là:

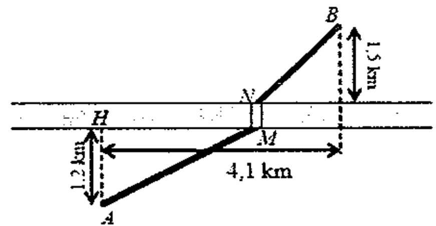
A. 14. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 33. Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 155m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng nửa vận tốc chạy trên bộ. Bạn hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, vận tốc dòng nước bằng 0 và mục tiêu B cách vị trí H là 1 km (xem hình vẽ)



A. $\frac{155}{\sqrt{2}}m$. **B.** $\frac{310}{\sqrt{2}}m$. **C.** $\frac{155}{\sqrt{3}}m$. **D.** $\frac{310}{\sqrt{3}}m$.

Câu 34. Người ta muốn làm một con đường đi từ địa điểm A đến đia điểm B ở hai bên bờ một con sông, các số liệu được thể hiện trên hình vẽ, con đường được làm theo đường gấp khúc *AMNB*. Biết rằng chi phí xây dựng 1 km đường bên bờ có điểm B gấp 1,3 lần chi phí xây dựng một km đường bên bờ có điểm A, chi phí làm cầu MN tại địa điểm nào cũng như nhau. Hỏi phải xây cầu tại điểm M cách điểm H bao nhiêu km để chi phí làm đường là nhỏ nhất?



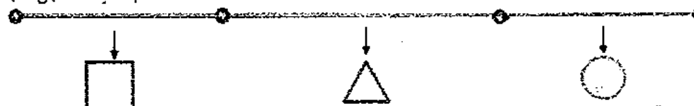
A. $2,63\,\text{km}$. B. $1,28\,\text{km}$. C. $3,14\,\text{km}$. D. $2,56\,\text{km}$.

Câu 35. Một sợi dây có chiều dài là L (m), được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình tròn. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất? (theo Thầy Hứa Lâm Phong)



A. $\dfrac{3L}{9+\pi\sqrt{3}}(m)$. B. $\dfrac{6L\sqrt{3}}{4+\pi\sqrt{3}}(m)$. C. $\dfrac{2L}{9+\pi\sqrt{3}}(m)$. D. $\dfrac{3L\sqrt{3}}{4+\pi\sqrt{3}}(m)$.

Câu 36. Một sợi dây có chiều dài là L m, được chia thành 3 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình hình vuông, phần thứ hai uốn thành tam giác đều có cạnh gấp 2 lần cạnh của hình vuông, phần thứ ba uốn thành hình tròn (như hình vẽ). Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để diện tích 3 hình thu được là nhỏ nhất? (theo Thầy Hứa Lâm Phong)



A. $\dfrac{7L}{49+\pi+\pi\sqrt{3}}(m)$. B. $\dfrac{5L}{49+\pi+\pi\sqrt{3}}(m)$.

C. $\dfrac{5L}{25+\pi+\pi\sqrt{3}}(m)$. D. $\dfrac{7L}{25+\pi+\pi\sqrt{3}}(m)$.

Câu 37. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng 80 cm và chiều rộng bằng 50 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x\,(cm)$, rồi gập tấm nhôm như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được thể tích lớn nhất.

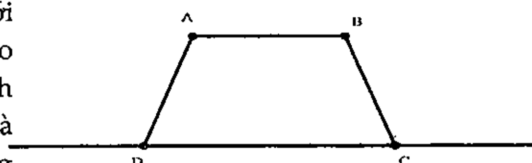
A. $x = 8\,cm$. B. $x = 9\,cm$. C. $x = 10\,cm$. D. $x = 12\,cm$.

Câu 38. Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là 60 cm, thể tích $96.000\,cm^3$. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/$1m^2$ và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100.000 đồng/$1m^2$. Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là (*trích đề thi thử lần 1, THPT Việt Trì, Phú Thọ*).

A. 83.200.000 đồng. B. 382.000 đồng.

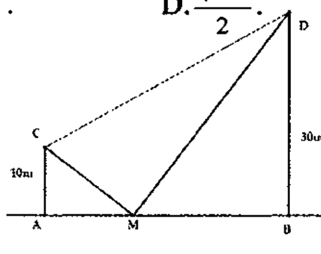
C. 83.200 đồng. D. 8.320.000 đồng.

Câu 39. Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $a(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng DC không phải rào). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2? (HSG Phú Thọ 2016-2017)



A. $\sqrt{3}a^2$. B. $\frac{5\sqrt{3}a^2}{4}$. C. $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$.

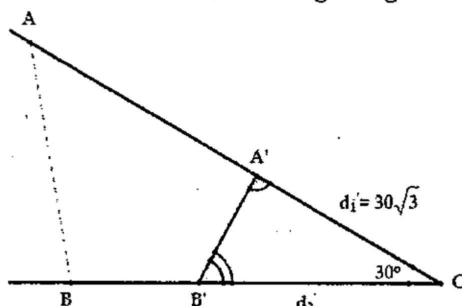
Câu 40. Hai chiếc cọc cao 10m và 30m lần lượt đặt tại hai vị trí A, B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng 24 m. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc (như hình vẽ).



Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào trên mặt đất để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất. (Trích đề thi thử lần 1 – số 473(11-2016) Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ)

A. $AM = 6m, BM = 18m$. B. $AM = 7m, BM = 17m$.
C. $AM = 4m, BM = 20m$. D. $AM = 12m, BM = 12m$.

Câu 41. Hai chất điểm A và B chuyển động thẳng đều cùng hướng về O (như hình vẽ) biết rằng vận tốc $V_B = \frac{V_A}{\sqrt{3}}$ và góc $\measuredangle AOB = 30^0$. Biết rằng khi khoảng cách giữa hai chất điểm A và B là nhỏ nhất thì A cách O một khoảng bằng $30\sqrt{3}(m)$. Tìm khoảng cách B đến O lúc đó?

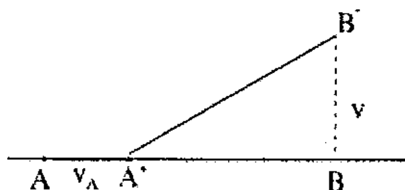


A. $30\sqrt{2}$ m. B. $30\sqrt{3}$ m. C. 90 m D. $15\sqrt{3}$ m.

Câu 42. Đặt một điện áp xoay chiều $u = 100\sqrt{2}\cos(100\pi t)V, t(s)$ vào hai đầu một đoạn mạch gồm biến trở R nối tiếp với cuộn dây thuần cảm độ tự cảm L. Điều chỉnh R để tổng điện áp hiệu dụng $(U_R + U_L)$ đạt giá trị cực đại, giá trị cực đại đó là

A. $100\sqrt{2}$ V. B. 200 V. C. $50\sqrt{2}$ V D. 100 V.

Câu 43. Từ hai bến A và B trên cùng một bờ sông có hai ca nô cùng khởi hành. Khi nước chảy do sức đẩy của động cơ, chiếc ca nô từ A chạy song song với bờ theo chiều từ A đến B với vận tốc 24 km/h, còn chiếc ca nô từ B chạy vuông góc với bờ có vận tốc là 18 km/h.



Quãng đường AB dài 1 km. Biết rằng sức đẩy của các động cơ không thay đổi và vận tốc của dòng nước bằng 0.

A. 300 m. **B.** 600 m. **C.** 100 m **D.** 400 m.

Câu 44. Một sợi dây có chiều dài là 6m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất? (theo Vũ Thị Ngọc Huyền)

A. $\frac{12}{4+\sqrt{3}}(m)$. **B.** $\frac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}(m)$. **C.** $\frac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}(m)$ **D.** $\frac{18}{9+4\sqrt{3}}(m)$.

Câu 45. Người ta tiêm một loại thuốc vào mạch máu ở cách tay phải của một bệnh nhân. Sau thời gian là t giờ, nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân đó được cho bởi công thức $C(t)=100\left(e^{-0,4t}-e^{-0,6t}\right)\ (0<t\le 24)$. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân là lớn nhất? (Trích đề thi thử lần 1, k2pi.net.vn)

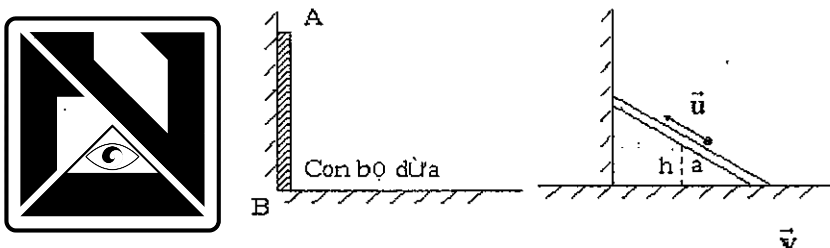
A. 12 giờ. **B.** 8 giờ. **C.** 6 giờ. **D.** 2 giờ.

Câu 46. Ông A muốn xây một hồ nuôi cá hình hộp chữ nhật có thể tích $288cm^2$. Biết đáy hồ có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và chiều cao không thấp hơn $9cm$. Gọi a, b, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của hồ. Hỏi ông A phải xây hồ có độ dài các cạnh a, b, h bằng bao nhiêu để đỡ tốn nguyên vật liệu nhất.

A. $a=6cm, b=12cm, h=4cm$. **B.** $a=12cm, b=6cm, h=4cm$.

C. $a=8cm, b=4cm, h=9cm$ **D.** $a=4cm, b=8cm, h=9cm$.

Câu 47. Một con bọ dừa đậu ở đầu B của một thanh cứng mảnh AB có chiều dài L đang dựng đứng cạnh một bức tường thẳng đứng (Hình vẽ)



Vào thời điểm mà đầu B của thanh bắt đầu chuyển động sang phải theo sàn ngang với vận tốc không đổi v thì con bọ bắt đầu bò dọc theo thanh với vận tốc không đổi u đối với thanh. Trong quá trình bò trên thanh, *con bọ đạt được độ cao cực đại* h_{max} *là bao nhiêu đối với sàn*? Cho đầu A của thanh luôn tỳ lên tường thẳng đứng.

A. $h_{max}=\frac{3L^2}{v}$. **B.** $h_{max}=\frac{2L^2}{v}$. **C.** $h_{max}=\frac{L^2}{3v}$ **D.** $h_{max}=\frac{L^2}{2v}$.

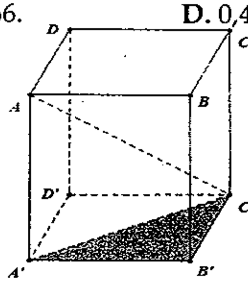
Câu 48. Người ta tiêm một loại thuốc vào mạch máu ở cách tay phải của một bệnh nhân. Sau thời gian là t giờ, nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân đó được cho bởi công thức $C(t)=\frac{0,28t}{t^2+4}\ (0<t<24)$. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân là lớn nhất? (Trích đề thi thử lần 1, k2pi.net.vn)

A. 12 giờ. **B.** 8 giờ. **C.** 6 giờ. **D.** 2 giờ.

Câu 49. Một mạch điện xoay chiều gồm hai đoạn MN và NP ghép nối tiếp. Đoạn MN chỉ có điện trở thuần R. Đoạn NP gồm ba phần tử nối tiếp: một cuộn cảm thuần có độ tự cảm L, một tụ điện có điện dung C và một biến trở R_x có trị số thay đổi trong phạm vị rất rộng. Đặt vào hai đầu MP một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng và tần số không đổi. Thay đổi giá trị của biến trở $R_x = R$ thì điện áp hiệu dụng giữa hai điểm NP đạt giá trị nhỏ nhất thì hệ số công suất toàn mạch lúc này gần giá trị nào nhất sau đây: (*bài toán theo thầy Huỳnh Xuân Nghiêm*)

A. 0,816. **B.** 0,756. **C.** 0,566. **D.** 0,466.

Câu 50. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích tất cả các mặt là $36\,cm^2$, độ dài đường chéo AC' bằng $6\,cm$. Hỏi thể tích của hình hộp đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu?



A. $V = 8\,cm^3$. **B.** $V = 12\,cm^3$.

C. $V = 8\sqrt{2}\,cm^3$. **D.** $V = 24\sqrt{3}\,cm^3$.

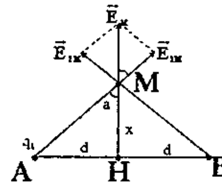
Câu 51. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh cactong. Hộp có đáy là hình vuông cạnh $x(cm)$, đường cao là $h(cm)$ và thể tích là $500(cm^3)$. Gọi $S(x)$ là diện tích của mảnh cactong. Tìm x sao cho $S(x)$ nhỏ nhất.

A. 10 cm. **B.** 15 cm. **C.** 5 cm. **D.** 25 cm.

Câu 52. Hai xe chuyển động trên hai đường vuông góc với nhau, xe A đi về hướng tây với tốc độ 50km/h, xe B đi về hướng Nam với tốc độ 30km/h. Vào một thời điểm nào đó xe A và B còn cách giao điểm của hai đường lần lượt 4,4km và 4km và đang tiến về phía giao điểm. Tìm khoảng cách ngắn nhất $d_{min}\,(km)$ giữa hai xe ?

A. $d_{min} = \frac{\sqrt{34}}{10}$. **B.** $d_{min} = \frac{\sqrt{34}}{5}$. **C.** $d_{min} = \frac{2\sqrt{34}}{3}$. **D.** $d_{min} = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

Câu 53. Có hai điện tích điểm $q_1 = q_2 = q > 0$ đặt tại hai điểm A, B trong không khí ($\varepsilon = 1$). Cho biết khoảng cách $AB = 2d > 0$. Cường độ điện trường tại M trên đường trung trục AB cách đường thẳng AB một khoảng $x > 0$. Hãy xác định x để cường độ điện điện trường E_M đạt cực đại.



A. $\frac{d}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{d}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{3d\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{2d}{\sqrt{3}}$.

Câu 54. Người ta cần làm một khối lăng trụ tứ giác đều bằng tôn có thể tích $2dm^3$ thì cần xác định độ dài các cạnh của lăng trụ đó như thế nào để ít hao tốn nguyên vật liệu nhất?

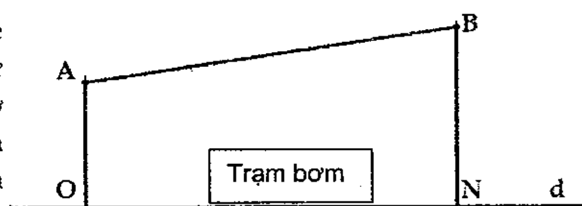
A. Cạnh đáy hình vuông là $\sqrt[3]{2}$ và cạnh bên bằng $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$.

B. Cạnh đáy hình vuông là 1 và cạnh bên bằng 2.

C. Cạnh đáy hình vuông là $\sqrt[3]{3}$ và cạnh bên bằng $\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$.

D. Cạnh đáy hình vuông là $\frac{1}{2}$ và cạnh bên bằng 8.

Câu 55. Có hai ngôi làng A, B nằm về cùng phía đối với bờ sông (d) như hình vẽ. Khoảng cách từ A đến bờ sông là 200 m. Khoảng cách từ B đến bờ sông là 450 m. Khoảng cách giữa A và B là 600 m.



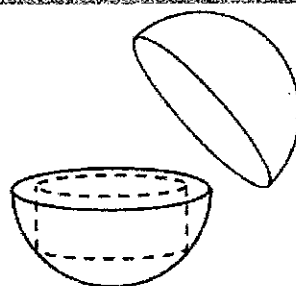
Uỷ ban xã muốn thuê 1 công ty về thiết kế xây dựng một trạm bơm nước trên bờ sông(về phía A,B) để dẫn nước về hai ngôi làng. Công ty thiết kế, phải tính toán chọn vị trí xây trạm bơm nước sao cho tổng khoảng cách từ trạm bơm nước đến 2 ngôi làng A và B là ngắn nhất. Hỏi tổng khoảng cách từ trạm bơm nước đến 2 ngôi làng A và B là ngắn nhất là bao nhiêu? (đơn vị m, kết quả làm tròn hàng đơn vị)

A. 850 m. **B.** 849 m. **C.** 760 m. **D.** 950 m.

Câu 56. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 200 km. Vận tốc của dòng nước là 8 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong 1 giờ được cho bởi công thức là $E(v)=cv^3t$ (trong đó c là một hằng số dương, E được tính bằng Jun). Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất?

A. $6\ km/h$. **B.** $9\ km/h$. **C.** $12\ km/h$. **D.** $15\ km/h$.

Câu 57. Công ty mỹ phẩm chuẩn bị cho ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai với thiết kế là một khối cầu như viên ngọc trai khổng lồ, bên trong là một khối trụ nằm trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng da như hình vẽ (hình ảnh chỉ mang tính chất minh họa). Theo dự kiến, nhà sản xuất có dự định để khối cầu có bán kính là $R=5\sqrt{3}$ cm. Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem để thể tích thực ghi trên bìa hộp là lớn nhất (với mục đích thu hút khách hàng).

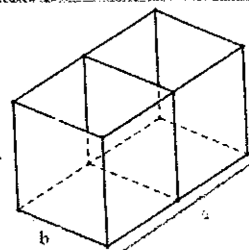


A. $108\pi\ cm^3$. **B.** $180\pi\ cm^3$. **C.** $250\pi\ cm^3$. **D.** $450\pi\ cm^3$.

Câu 58. Một chất điểm chuyển động theo qui luật $s(t)=6t^2-t^3$ (trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây mà chất điểm bắt đầu chuyển động). Tính thời điểm $t(s)$ mà tại đó vận tốc (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất. *(THPT Chuyên Thái Bình, 2016)*

A. $t=2$. **B.** $t=4$. **C.** $t=1$. **D.** $t=3$.

Câu 59. Người thợ làm một bể cá hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296\ m^3$. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với 3 kích thước a,b,c như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước a,b,c bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dày của kính là không đáng kể. *(THPT Tiên Du, Bắc Ninh, lần 1)*



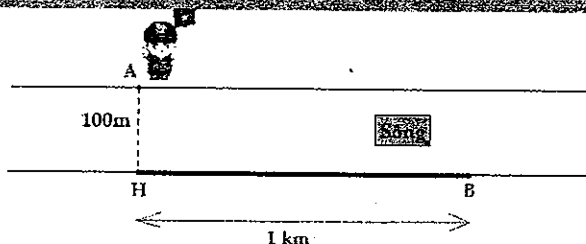
A. $\begin{cases} a=3,6m \\ b=0,6m \\ c=0,6m \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a=2,4m \\ b=0,9m \\ c=0,6m \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a=1,8m \\ b=1,2m \\ c=0,6m \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a=1,2m \\ b=1,2m \\ c=0,9m \end{cases}$.

Câu 60. Cho một hình nón có chiều cao h và bán kính của đường tròn đáy là R. Một mặt phẳng (P) thay đổi song song với mặt phẳng chứa đáy của hình nón và cắt hình nón theo một đường tròn giao tuyến (C). Dựng hình trụ có một đáy là đường tròn (C) và đáy còn lại nằm trên mặt đáy của hình nón. Gọi V_1 là thể tích của khối trụ có thể tích lớn nhất trong các hình trụ trên khi (P) thay đổi và V_2 là thể tích của khối nón. Tỉ số của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng: (***Sở GD&ĐT tỉnh Bạc Liêu, 2016***)

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

[redacted]

Câu 62. Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng nửa vận tốc chạy trên bộ.



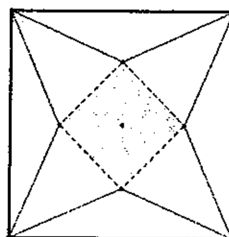
Bạn hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, vận tốc dòng nước bằng 0 và mục tiêu B cách vị trí H là 1 km (như hình vẽ) (***Thi thử Group Toán 3K lần 12, Facebook, 2016***)

A. $100\ m$. **B.** $346,41\ m$. **C.** $115,47\ m$. **D.** $1004,9\ m$.

Câu 63. Một công ty nhận sản xuất 400.000 huy chương bạc nhân ngày kỷ niệm lần thứ 30 Apollo 11 đổ bộ lên mặt Trăng. Công ty sở hữu 20 máy (công suất đều như nhau), mỗi máy có thể sản xuất 200 huy chương/giờ. Chi phí lắp đặt máy để sản xuất huy chương là 80 USD/máy và tổng chi phí vận hành là 5,76 USD/giờ. Biết rằng trên bản hợp đồng trong vòng 6 ngày công ty đó phải giao đủ số lượng, nếu không sẽ phải bồi thường gấp đôi số tiền nhận được. Giả sử các máy chạy tốt suốt ngày đêm. Chi phí thấp nhất để công ty có thể sản xuất 400.000 huy chương và đúng hạn định gần nhất với giá trị nào dưới đây: (***Thi thử Group Toán 3K lần 13, Facebook, 2016***)

A. 2080 USD. **B.** 1943 USD. **C.** 1969 USD. **D.** 1920 USD.

Câu 64. Cho một tấm bìa hình vuông cạnh 5 dm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gập lên, ghép lại tạo thành một hình chóp tứ giác đều như hình vẽ. Để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình là (***Thi HKI, THPT Lương Văn Tụy, 2016***)

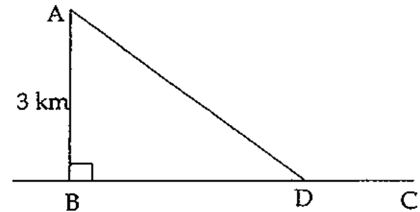


A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}\ dm$. **B.** $\frac{5}{2}\ dm$. **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}\ dm$. **D.** $2\sqrt{2}\ dm$.

Câu 65. Một tấm nhôm hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là 8 dm và 5 dm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó thành bốn hình vuông có cạnh bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái thùng dạng hình hộp không nắp. Tìm thể tích lớn nhất của thùng (***HK1, Sở GD&ĐT tỉnh Bắc Ninh, 2016***)

A. $20\ dm^3$. **B.** $9\ dm^3$. **C.** $6\ dm^3$. **D.** $18\ dm^3$.

Câu 66. Bạn Hoa đi từ nhà ở vị trí A đến trường học ở vị trí C phải đi qua cầu từ A đến B tới trường. Trận lũ lụt vừa qua làm cây cầu bị ngập nước, do đó bạn Hoa phải đi bằng thuyền tư 2 nhà đến một vị trí D nào đó ở trên đoạn BC với vận tốc $4\ km/h$ sau đó đi với vận tốc $5\ km/h$ đến C.



Biết độ dài $AB = 3km, BC = 5km$. Hỏi muộn nhất mấy giờ bạn Hoa phải xuất phát từ nhà để có mặt ở trường lúc 7h30 phút sáng để kịp vào học ?

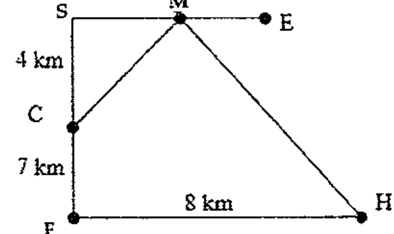
A. $6h03$ phút. **B.** $6h16$ phút. **C.** $5h30$ phút. **D.** $6h05$ phút.

Câu 67. Một sợi dây kim loại dài 60 (cm) được cắt ra thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất có độ dài x (được uốn thành một hình vuông). Đoạn dây còn lại được uốn thành một vòng tròn. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì giá trị của x xấp xỉ bao nhiêu cm ?



A. $28,2(cm)$. **B.** $33,6(cm)$. **C.** $30(cm)$. **D.** $36(cm)$.

Câu 68. Một bạn học sinh chăn trâu giúp gia đình ở một địa điểm C cách một con suối thẳng SE là 4 km (như hình 2). Bạn đó muốn tắm cho con trâu ở con suối đó rồi trở về trang trại ở vị trí H. Hỏi quãng đường ngắn nhất mà bạn có thể hoàn thành công việc này là bao nhiêu km? (các kích thước được cho hình 2)



Hình 2

A. $17\ (km)$. **B.** $\sqrt{113}(km)$. **C.** $2\sqrt{113}(km)$. **D.** $19\ (km)$.

Câu 69. Người ta muốn xây một hồ nước hình hộp chữ nhật có thể tích bằng $100\ m^3$, có chiều cao cố định trong khoảng từ $1,5m$ đến $2m$ và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Tính diện tích xây tiết kiệm nhất (nghĩa là diện tích đáy cộng với diện tích xung quanh của hồ là nhỏ nhất) với sai số là $\pm 0,5\ m^2$. (***HK1, Phổ Thông Năng Khiếu, Tp.Hồ Chí Minh, 2016***)

A. $107\ m^2$ **B.** $110\ m^2$ **C.** $90\ m^2$ **D.** $64\ m^2$

Câu 70. Lợi nhuận của một công ty may mặc khi sản xuất và bán hết x (sản phẩm) loại 1 được tính bởi biểu thức $P(x) = -0,02x^3 + 11,7x^2 + 240x - 1000$ (triệu đồng). Hỏi công ty này cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm loại 1 thì thu được lợi nhuận lớn nhất (giả sử các sản phẩm loại 1 đều được bán hết). (***HK1, THPT Hùng Vương, Tp.Hồ Chí Minh, 2016***)

A. 500. **B.** 2550. **C.** 400. **D.** 687000.

HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

Câu 1. Đáp án B

Ta có: $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6, \Rightarrow T'(t) = -0,2t + 1,2 \Rightarrow T'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$

Đồng thời ta có: $\begin{cases} T(0) = 98,6^o F = 37^0 C \\ T(6) = 102,2^o F = 39^0 C \\ T(11) = 99,7^o F = 37,6^0 C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{t\in[0;12]} T(t) = T(6) = 39^0 C \\ \min\limits_{t\in[0;12]} T(t) = T(0) = 37^0 C \end{cases} \Leftrightarrow \Delta t = 2^0 C$

Cách khác: Ta có $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6 = 102,2 - 0,1(t-6)^2 \le 102,2 \ \forall t \in [0;12]$

Vậy dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t = 6$. Do đó $maxT = 102,2 \Leftrightarrow t = 6$

Câu 2. Đáp án D

Ta có thể tổng quát bài toán lên khi xét thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều trên là V (đvtt)

Gọi $x, y > 0$ lần lượt là chiều dài cạnh đáy và chiều cao của lặng trụ

Khi đó ta có $V = yx^2 \Rightarrow y = \frac{V}{x^2}$

Ta có $S_{tp} = 2S_{đáy} + 4S_{mặt bên} = 2x^2 + 4xy = 2x^2 + \frac{4V}{x}$

Đặt $f(x) = 2x^2 + \frac{4V}{x}$. Bài toán trở thành tìm $\min\limits_{x>0} f(x) = ?$

Ta có $f'(x) = 4x - \frac{4V}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{V}$.

Lại có $f''(x) = 4 + \frac{8V}{x^3} > 0, \forall x > 0$. Do đó $minf(x) = f\left(\sqrt[3]{V}\right) = \sqrt[4]{4V}$

Theo đề bài ta có $minS_{tp} = 6\sqrt[3]{V^2} = 6\sqrt[3]{27^2} = 54$.

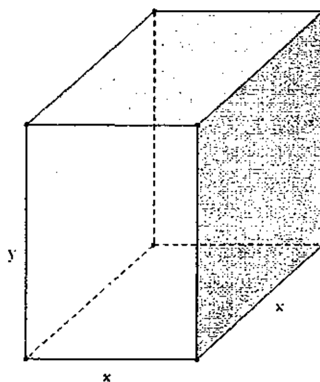
Câu 3. Đáp án B

Để tốn ít nguyên vật liệu nhất, ta cần thiết kế sao cho diện tích toàn phần của khối hộp là lớn nhất.

Ta có $S_{xq} = x^2 + 4xy$

Do $V = x^2y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x^2} \Rightarrow S(x) = x^2 + 4x\frac{4}{x^2} = x^2 + \frac{16}{x}$

Do S, x phải luôn dương nên ta tìm giá trị nhỏ nhất của S trên $(0;+\infty)$.



Ta có : $S'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}, S'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Lại có $S''(x) = 2 + \frac{32}{x^3} > 0 \ \forall x \in (0;+\infty)$. Do đó $minS = S(2) = 12$

Và khi đó $y = \frac{4}{x^2} = 1$

Vậy, yêu cầu bài toán tương đương với cạnh đáy hình hộp là 2m, chiều cao hình hộp là 1 m và khi đó diện tích toàn phần nhỏ nhất sẽ là $12m^2$.

Câu 4. Đáp án A

Gọi phần bị cắt là x, ta thấy $x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$. Khi đó thể tích khối hộp $V = x(a-2x)^2$

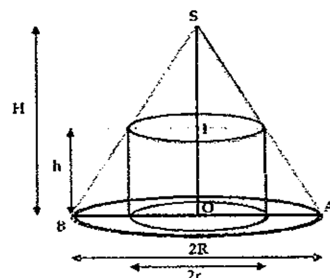
Xét $f(x)=x(a-2x)^2$, $\forall x\in\left(0;\frac{a}{2}\right)$. Bài toán trở thành tìm $\max\limits_{x\in\left(0;\frac{a}{2}\right)} f(x)=?$

$\Rightarrow f'(x)=(a-2x)^2-4x(a-2x)=(a-2x)(a-6x)$

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{a}{2}(ktm)\\ x=\frac{a}{6}(tm)\end{array}\right.$. Lập bảng biến thiên, ta thấy $x=\frac{a}{6}\Rightarrow maxf(x)=\frac{2a^3}{27}$

Câu 5. Đáp án A. *Tương tự câu 4 ta có* $x=\frac{a}{6}=\frac{48}{6}=8$

Câu 6. Đáp án C



Bài toán có thể tổng quát lên thành một hình nón có bán kính đáy R, chiều cao là H.

Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón trên.

Đồng thời gọi O, I lần lượt là tâm của hai đường tròn đáy như hình vẽ.

Ta có $\frac{SI}{SO}=\frac{r}{R}=\frac{H-h}{H}\Rightarrow r=R\frac{H-h}{H}$ với $0<h<H$ và $0<r<R$

Ta có $V_{tru}=h.S=h.\pi r^2=h\pi R^2\frac{(H-h)^2}{H^2}=\frac{\pi R^2}{H^2}\underbrace{h(H-h)^2}_{f(h)}$

Ta có $maxV_{tru}\Leftrightarrow maxf(h)$

Ta có $f'(h)=(H-h)^2-2h(H-h)=(H-h)(H-3h)$

$f'(h)=0\Leftrightarrow h=\frac{H}{3}<H$. Lập bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{0<h<H} f(h)=f\left(\frac{H}{3}\right)$

Khi đó ta có $V_{tru}=\frac{\pi R^2}{H^2}\frac{H}{3}\left(H-\frac{H}{3}\right)^2=\frac{4\pi R^2H}{27}$ và đồng thời $\frac{r}{R}=\frac{H-h}{H}=\frac{2}{3}$.

Trở lại bài toán ta có: $V_{Tru}=\frac{4\pi 6^2.9}{27}=48\pi\left(cm^3\right)$. Đáp án C.

Câu 7. Đáp án A

Không mất tính tổng quát ta giả sử chiều dài dây là $L\ (cm)$.

Khi đó đoạn dây thứ nhất chính là chu vi của hình vuông và bằng $4a$

Khi đó ta có đoạn dây thứ hai là $L-4a$ và cũng chính là chu vi của đường tròn bán kính $r\Rightarrow 2\pi r=L-4a\Rightarrow r=\frac{L-4a}{2\pi}>0\Rightarrow a<\frac{L}{4}$

Do đó tổng diện tích của hình vuông và hình tròn $=S_{vuong}+S_{tron}=a^2+\pi\frac{(L-4a)^2}{4\pi^2}$

Đặt $S(a)=a^2+\frac{(L-4a)^2}{4\pi}$ với $0<a<\frac{L}{4}$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $S(a)$ với $0<a<\frac{L}{4}$

Khi đó ta có: $S'(a)=2a+\frac{-2(L-4a)}{\pi}=\frac{2}{\pi}\left[(\pi+4)a-L\right]$, $S'(a)=0\Leftrightarrow a=\frac{L}{\pi+4}<\frac{L}{4}$

Lập bảng biến thiên, ta có:

a	0	$\frac{L}{\pi+4}$	$\frac{L}{4}$
$S'(a)$	$-$	0	$+$
$S(a)$	↘	min	↗

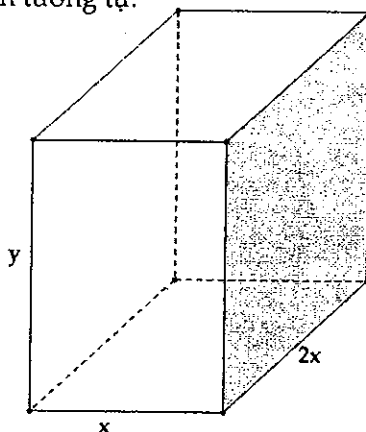
Dựa vào bảng biến ta có: $\min\limits_{\left(0;\frac{L}{4}\right)} S(a) = S\left(\frac{L}{\pi+4}\right)$ và khi đó bán kính của đường tròn sẽ là $r = \frac{L}{2(\pi+4)} = \frac{a}{2}$. Do đó lập tỉ số ta sẽ có $\frac{a}{r} = 2$

Như vậy rõ ràng, ta không cần thiết phải biết chính xác số đo chiều dài dây mà cần nhớ kết quả quan trọng $\boxed{a=2r}$ khi gặp các bài toán tương tự.

Câu 8. Đáp án B

Gọi x là chiều rộng của đáy hình chữ nhật và y là chiều cao của khối hộp chữ nhật.

Để tốn ít nguyên vật liệu nhất, ta cần thiết kế sao cho diện tích toàn phần của khối hộp là lớn nhất.



Ta có $S_{xq} = 2x^2 + 2xy + 2(2xy) = 2x^2 + 6xy$

Do $V = 2x^2y \Rightarrow y = \frac{V}{2x^2}$

$\Rightarrow S(x) = 2x^2 + 6x\frac{V}{2x^2} = 2x^2 + \frac{3V}{x}$

Do S, x phải luôn dương nên ta tìm giá trị nhỏ nhất của S trên $(0;+\infty)$.

Ta có $S'(x) = 4x - \frac{3V}{x^2}$, $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3V}{4}}$

Lại có $S''(x) = 4 + \frac{6V}{x^3} > 0\ \forall x \in (0;+\infty)$. Do đó $\min S = S\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{4}}\right) = 3\sqrt[3]{\frac{9V^2}{2}}$

Và khi đó chiều cao là $y = \frac{V}{2x^2} = \frac{V}{2\sqrt[3]{\frac{9V^2}{16}}} = 2\sqrt[3]{\frac{16V}{9}}$

Vậy, yêu cầu bài toán tương đương với chiều rộng đáy hình hộp là 5m, chiều dài là 10 m, chiều cao hình hộp là $\frac{40}{3}$ m và khi đó diện tích toàn phần nhỏ nhất sẽ là 150 m^2.

Do đó chi phí thấp nhất sẽ là $150.(500000) = 75.000.000$ (đồng)

Cách khác: $S(x) = 2x^2 + \frac{3V}{x} = 2x^2 + \frac{3V}{2x} + \frac{3V}{2x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2\frac{9V^2}{4x^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{9V^2}{2}}$.

Câu 9. Đáp án C

Gọi x, y lần lượt là chiều dài cạnh đáy hình vuông và chiều cao của hình hộp $(x > 0, y > 0)$

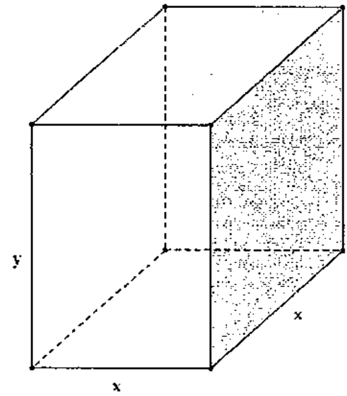
Để tốn ít nguyên vật liệu nhất, ta cần thiết kế sao cho diện tích toàn phần của khối hộp là lớn nhất.

Ta có $S_{xq} = x^2 + 4xy$

Do $V = x^2y = 108 \Rightarrow y = \frac{108}{x^2}$

$\Rightarrow S(x) = x^2 + 4x\frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}$

Do S, x phải luôn dương nên ta tìm giá trị nhỏ nhất của S trên $(0;+\infty)$.



Ta có : $S'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}, S'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 216 \Leftrightarrow x = 6$

Lại có $S''(x) = 2 + \frac{864}{x^3} > 0, \forall x \in (0;+\infty)$. Do đó $min S = S(6) = 108$

Và khi đó $y = \frac{108}{6^2} = 3$

Vậy, yêu cầu bài toán tương đương với cạnh đáy hình hộp là 6m, chiều cao hình hộp là 3 m và khi đó diện tích toàn phần nhỏ nhất sẽ là 108 m^2.

Câu 10. Đáp án A

Gọi x là giá bán thực tế $(5 \le x \le 10)$

Ta có giảm $2USD$ thì tăng thêm 40 sản phẩm

Do đó giảm $(10-x)$ USD thì tăng thêm $20(10-x)$ sản phẩm

Số sản phẩm bán được tương ứng với giá bán là $25 + 20(10-x) = -20x + 225$

Vậy tổng lợi nhuận thu được sẽ là $(-20x+225)(x-5) = -20x^2 + 325x - 1125$

Đặt $P(x) = -20x^2 + 325x - 1125$ với $5 \le x \le 10$

Bài toán trở thành tìm $\max\limits_{x\in[5;10]} P(x) = ?$

Ta có $P'(x) = -40x + 325, P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{65}{8} = 8,125 \in [5;10]$

Xét $\begin{cases} P(5) = 0 \\ P\left(\frac{65}{8}\right) = \frac{3125}{16} \approx 195,3125 \Rightarrow \max\limits_{x\in[5;10]} P(x) = P\left(\frac{65}{8}\right) \\ P(10) = 125 \end{cases}$

Câu 11. Đáp án B.

Gọi x (triệu đồng) là giá tua $(0 < x < 2)$

Giá đã giảm so với ban đầu là $2 - x$

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán x là $\frac{(2-x)20}{0,1} = 400 - 200x$

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là $150 + 400 - 200x = 450 - 200x$

Tổng doanh thu là $f(x) = x(550 - 200x) = -200x^2 + 550x$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ với $0 < x < 2$

$f'(x) = -400x + 550, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}$.

Lập bảng biến thiên ta có:

x	0		$\frac{11}{8}$		2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$\frac{3025}{8}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max_{x\in(0;2)} f(x)=f\left(\frac{11}{8}\right)=378{,}125$

Vậy công ty cần đặt giá tua là 1.375.000 (đồng) thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378.125.000 (đồng).

Câu 12. Đáp án C

Gọi x (km/h) là vận tốc của tàu.

Thời gian tàu chạy quãng đường 1km là $\frac{1}{x}$ (giờ).

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là $\frac{1}{x}.480=\frac{480}{x}$ (ngàn đồng).

Tại v = 10 km/h chi phí cho quãng đường 1 km ở phần thứ hai là $\frac{1}{10}.30=3$ (ngàn đồng).

Xét tại vận tốc x(km/h): gọi y (ngàn đồng) là chi phí cho quãng đường 1km tại vận tốc x, ta có $y=kx^3, 3=k10^3$ (k là hệ số tỉ lệ giữa chi phí 1km đường của phần thứ hai và lập phương của vận tốc), suy ra $\frac{y}{3}=\left(\frac{x}{10}\right)^3 \Leftrightarrow y=0{,}003x^3$.

Vậy tổng chi phí tiền nhiên liệu cho 1km đường là $p=p(x)=\frac{480}{x}+0{,}003x^3$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $p(x)$

Áp dụng đạo hàm ta có chi phí p nhỏ nhất khi tàu chạy với vận tốc $x=20(km/h)$.

Câu 13. Đáp án A

$$V'(t)=\frac{1}{100}\left(90t^2-t^3\right)\Rightarrow V''(t)=0\Leftrightarrow\frac{1}{100}\left(180t-3t^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=60\\t=0\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta có:

t	0		60		90
$V'(t)$	0	+	0	−	
$V(t)$		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta chọn đáp án A.

Câu 14. Đáp án C

Gọi x là bán kính nửa hình tròn và y là chiều cao của hình chữ nhật phần dưới của gương. Chu vi của gương là:

$P=2x+2y+\pi x$ do $y=\frac{1}{2}(P-2x-\pi x)$ và $y>0\Rightarrow 0<x<\frac{P}{\pi+2}$

Diện tích của gương là $S=2xy+\frac{1}{2}\pi x^2=x(P-2x-\pi x)+\frac{1}{2}\pi x^2=Px-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x^2$

Đặt $f(x)=Px-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x^2$. Bài toán trở thành tìm $\max_{x\in\left(0;\frac{P}{\pi+2}\right)} f(x)=?$

Ta có $f'(x) = P - 2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{P}{\pi+4}$

Lập bảng biến ta suy ra bán kính $x = \frac{P}{\pi+4}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15. Đáp án B

Gọi $q(0<q<60)$ là số sản phẩm mà công ty A cần sản xuất để thu được lợi nhuận cao nhất.

Khi đó, nếu bán hết số sản phẩm thì doanh thu sẽ là $D(q) = q(180-3q) = 180q - 3q^2$

Suy ra lợi nhuận mà công ty thu được là $L(q) = D(q) - C(q) = -6q^2 + 108q + 9789$

Bài toán trở thành tìm $\max\limits_{0<q<60} L(q) = ?$

Ta có $L'(q) = -12q + 108, L'(q) = 0 \Leftrightarrow q = 9 \in (0;60)$

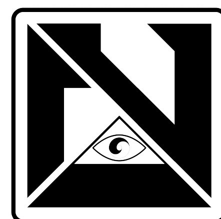
Lập bảng biến thiên ta có $\max\limits_{0<q<60} L(q) = L(9) = 10275$

Vậy để thu được lợi nhuận cao nhất thì công ty cần sản xuất 9 sản phẩm.

Câu 16. Đáp án A

$V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = 1 \Rightarrow h = \frac{3}{\pi r^2}$

Ta có $S_{xq} = \pi rl = \pi r\sqrt{h^2+r^2} = \pi r\sqrt{\frac{9}{\pi^2 r^4}+r^2} = \pi\sqrt{\underbrace{\frac{9}{\pi^2 r^2}+r^4}_{f(r)}}$



Nhận xét khi $S_{xq\,min} \Leftrightarrow f(r)min$

Cách 1: khảo sát hàm số

Cách 2: sử dụng bất đẳng thức Cauchy

$\frac{9}{\pi^2 r^2} + r^4 = \frac{9}{2\pi r^2} + \frac{9}{2\pi r^2} + r^4 \geq 3\sqrt[3]{\frac{9}{2\pi r^2}\cdot\frac{9}{2\pi r^2}\cdot r^4} = 3\sqrt[3]{\frac{81}{4\pi^2}}$

Do đó dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{9}{\pi r^2} = r^4 \Rightarrow r = \sqrt[6]{\frac{9}{2\pi}}$

Câu 17. Đáp án D

Lần lượt gọi S là chi phí, x, y lần lượt chiều rộng của đáy và chiều cao của đáy hộp.

Từ giả thiết đề bài ta có: $S = 10000S_{đáy} + 5000(S_{xq}) = 10000.(2x.x) + 2(xy + 2xy)5000$

Suy ra $S = 20000x^2 + 30000xy$. Mặt khác ta có $V = 2x^2y = 10 \Rightarrow y = \frac{5}{x^2}$

Do đó $S = 20000x^2 + \frac{150000}{x}$. Bài toán trở thành tìm $\min\limits_{x>0} f(x) = ?$

Ta có $S'(x) = 40000x - \frac{150000}{x^2}, S'(x) = 0 \Rightarrow x_o = \sqrt[3]{\frac{15}{4}} \Rightarrow y = 5\sqrt[3]{\left(\frac{4}{15}\right)^2}$

Lập bảng biến thiên, ta có:

x	0		x_o		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		↘	S_{min}	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \min_{x>0} S(x) = S\left(\sqrt[3]{\frac{15}{4}}\right)$

Do đó các kích thước là dài $2\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$, rộng $\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$

Câu 18. Đáp án B

Gọi Q là lượng gạo doanh nghiệp X cần sản xuất để đạt lợi nhuận cao nhất thì khi đó ta có $Q = Q_D = 656 - \frac{1}{2}P \Rightarrow P = 1312 - 2Q$.

Doanh thu của doanh nghiệp: $R = P.Q = (1312 - 2Q).2Q$

Lợi nhuận của doanh nghiệp: $L = R - C = -Q^3 + 75Q^2 + 312Q - 100$

Khảo sát hàm trên ta thấy lợi nhuận đạt cực đại khi $Q = 52$

Câu 19. Đáp án B

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra. $(x > 400)$

Giá chênh lệch sau khi tăng là $x - 400$.

Số phòng cho thuê giảm nếu giá tăng là $2\frac{(x-400)}{20} = \frac{x-400}{10}$.

Số phòng cho thuê với giá x là $50 - \frac{x-400}{10} = 90 - \frac{x}{10}$

Tổng doanh thu trong ngày là $f(x) = x\left(90 - \frac{x}{10}\right) = 90x - \frac{x^2}{10}$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ với $x > 400$

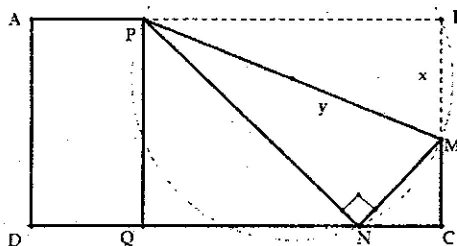
Ta có $f'(x) = 90 - \frac{x}{5}, f'(x) = 0 \Rightarrow x = 450(tm)$. Lập bảng biến thiên ta có:

x	400		450		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	20250	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{x\in(400;+\infty)} f(x) = f(450) = 20250$

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2.025.000 đồng.

Câu 20. Đáp án B



Gọi điểm như hình vẽ.

Kẻ $PQ \perp CD$.

Điểm N chạm đáy CQ thì $MB > MC \Leftrightarrow x > 4$

Vì ΔMNC đồng dạng

$$\Delta NPQ \Rightarrow \frac{MN}{NP} = \frac{NC}{PQ} \Rightarrow \frac{x}{PB} = \frac{NC}{8} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - (8-x)^2}}{8} \Rightarrow y^2 = \frac{x^3}{x-4}$$

Hơn nữa do $PB \le AB = 12 \Rightarrow \sqrt{y^2 - x^2} \le 12 \Leftrightarrow x \in \left[18 - 6\sqrt{5}; 18 + 6\sqrt{5}\right]$

Tóm lại, $18-6\sqrt{5}\le x\le 8$. Đặt $f(x)=\dfrac{x^3}{x-4}$. Bài toán trở thành tìm $\min\limits_{x\in[18-6\sqrt{5};8]} f(x)=?$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{2x^2(x-6)}{(x-4)^2}; f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=0(ktm) \end{array}\right.$

Xét $\begin{cases} f(6)=6\sqrt{3}\approx 10,39 \\ f(18-6\sqrt{5})=6\sqrt{15}-6\sqrt{3}\approx 12,8455 \\ f(8)=128 \end{cases} \Rightarrow \min f(x)=f(6)=6\sqrt{3}$.

Câu 21. Đáp án D. Tương tự câu 4 ta có $x=\dfrac{a}{6}=\dfrac{48}{6}=8$

Câu 22. Đáp án C

Gọi x là giá bán của sản phẩm. $(0<x<120)$

Ta có doanh thu mà công ty thu được là $R(x)=xq(x)=x(120-x)=120x-x^2$

Đồng thời chi phí mà công ty bỏ ra là $C(x)=40(120-x)=4800-40x$

Lợi nhuận mà công ty thu được chính là $R(x)-C(x)=-x^2+160x-4800$

Xét $f(x)=-x^2+160x-4800$. Bài toán trở thành tìm $\max\limits_{0<x<120} f(x)=?$

Ta có $f'(x)=-2x+160, f'(x)=0\Leftrightarrow x=80$. Lập bảng biến thiên ta có:

x	0		80		120
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$		↗	1600	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{0<x<120} f(x)=f(80)=1600$

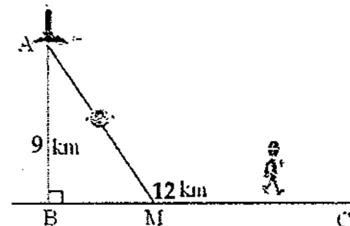
Vậy khi bán với giá 80 ngàn thì công ty đạt lợi nhuận cao nhất.

Câu 23. Đáp án C (Trích đề thi thử THPT Thanh Miện, Hải Dương, 2016)

Đặt $x=BM$ (km). Điều kiện: $0<x<12$.

Suy ra quãng đường $AM=\sqrt{81+x^2}$ và quãng đường $MC=12-x$.

Thời gian người canh hải đăng chèo đò đi từ A đến M là $t_{AM}=\dfrac{\sqrt{81+x^2}}{4}$.



Thời gian người canh hải đăng đi bộ từ M đến C là $t_{MC}=\dfrac{12-x}{8}$

Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là $t=t_{AM}+t_{MC}=\dfrac{\sqrt{81+x^2}}{4}+\dfrac{12-x}{8}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{81+x^2}}{4}+\dfrac{12-x}{8}$ trên đoạn $(0;12)$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ với $x\in(0;12)$

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{x}{4\sqrt{81+x^2}}-\dfrac{1}{8}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \sqrt{81+x^2}=2x \xleftrightarrow{x\in(0;12)} x=3\sqrt{3}$.

Lập bảng biến thiên, ta suy ra $\min f(x) = f(3\sqrt{3}) = \dfrac{12+9\sqrt{3}}{8}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của t tại điểm M cách B một khoảng $x = 3\sqrt{3}\text{km} \approx 5,196\text{km}$.

Câu 24. Đáp án A

Gọi $x(x > 45)$ là giá bán mới của 1 sản phẩm mà doanh nghiệp phải xác định để lợi nhuận thu được sau khi tăng giá là cao nhất. Suy ra số tiền đã tăng là $x - 45$

[redacted]

Đặt $f(x) = -3x^2 + 276x - 5625$. Bài toán trở thành tìm $\max\limits_{x>45} f(x) = ?$

Ta có $f'(x) = -6x + 276, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 46$ (ngàn đồng)

Lập bảng biến thiên, ta suy ra $\max\limits_{x>45} f(x) = f(46) = 1083$ (ngàn đồng).

Câu 25. Đáp án D

Gọi x là chiều dài cạnh song song với bờ giậu và y là chiều dài cạnh vuông góc với bờ giậu.

Theo đề bài ta có $x + 2y = a \Rightarrow x = a - 2y, 0 < y < \dfrac{a}{2}$.

Diện tích của miếng đất là $S = xy = y(a - 2y)$

Đặt $f(y) = y(a-2y), \forall y \in \left(0; \dfrac{a}{2}\right)$.

[redacted]

Cách khác: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

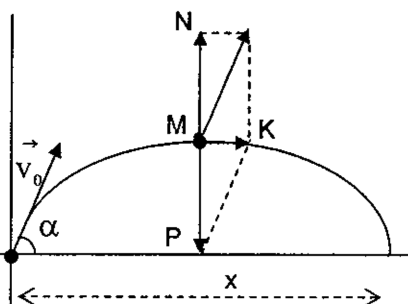
$$S = xy = y(a-2y) = \frac{1}{2}2y(a-2y) \le \frac{1}{2}\frac{(2y+a-2y)^2}{4} = \frac{a^2}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2y = a - 2y \Leftrightarrow y = \dfrac{a}{4} \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

Câu 26. Đáp án A

Trước tiên ta tính độ cao nhất của vật trên quỹ đạo và xác định thời điểm mà nó đạt được độ cao đó ($g = 10m/s^2$)

Véc tơ $\overrightarrow{v_0}$ được phân tích thành tổng của hai véc tơ theo hai phương vuông góc với nhau (phương ngang và phương thẳng đứng) như hình vẽ. Vật cao nhất khi $\overline{MN} = -\overline{MP}$,



trong đó $\begin{cases} \left|\overline{MP}\right| = gt \ (1) \\ MN^2 = v_o^2 - MK^2 = v_o^2 - v_o^2\cos^2\alpha \ (2) \end{cases}$ $\alpha \in (0;90^0)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (gt)^2 = v_o^2(1-\cos^2\alpha) \Rightarrow t = \frac{v_o\sin\alpha}{g}$

Do đó h lớn nhất khi và chỉ khi $t = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$ và khi đó $h = v_o\sin\alpha.t = \frac{v_o^2\sin^2\alpha}{g}$

Vì quỹ đạo của vật ném xiên là Parabol nên tầm ném của vật được

Ta tính $x = MK.2t = v_o\cos\alpha.2\frac{v_o\sin\alpha}{g} = \frac{v_o^2.\sin 2\alpha}{g} = f(\alpha)$

Ta có thể ứng dụng đạo hàm tìm $\max f(\alpha) = f(45^0) = \frac{v_o^2}{9}$ hoặc sử dụng tính bị chặn của hàm số lượng giác $x = \frac{v_o^2.\sin 2\alpha}{g} \le \frac{v_o^2}{g}$ (do $\sin 2\alpha \le 1$).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^0$.

Câu 27. Đáp án B

Gọi x là bán kính của hình bán nguyệt $0 < x < a$

Ta có chu vi của hình bán nguyệt là πx

Tổng ba cạnh của hình chữ nhật là $a - \pi x$

Khi đó 1 cạnh của hình chữ nhật có độ dài là $2x$ và cạnh còn lại là $\frac{(a-\pi x)-2x}{2}$

Diện tích của cửa sổ là: $S = S_1 + S_2 = \frac{\pi x^2}{2} + 2x.\frac{a-\pi x-2x}{2}$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $S(x)$ với $0 < x < a$

$\Rightarrow S(x) = ax - \left(\frac{\pi}{2}+2\right)x^2 \Rightarrow S'(x) = a - (\pi+4)x \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4+\pi}$.

Đồng thời $S''(x) = -(\pi+4) < 0, \forall x \in (0;a)$. Do đó $maxS = S\left(\frac{a}{4+\pi}\right)$

Khi đó kích thước của nó là chiều cao bằng $\frac{a}{4+\pi}$, và chiều rộng bằng $\frac{2a}{4+\pi}$.

Câu 28. Đáp án B

Gọi $x = HM\left(0 < x < 25,86\right)$. Khi đó thời gian của lộ trình đi được là

Ta có $t = t_{AM} + t_{MB} \xleftrightarrow{S=vt \Rightarrow t=\frac{S}{v}} \frac{AM}{v_{AM}} + \frac{MB}{v_{MB}} = \frac{\sqrt{16,26^2+x^2}}{8} + \frac{25,68-x}{12}$

Xét $f(x) = \frac{\sqrt{16,26^2+x^2}}{8} + \frac{25,68-x}{12} \left(0 < x < 25,68\right)$

Bài toán trở thành tìm $\min\limits_{x\in(0;25,68)} f(x) = ?$

Ta có $f'(x) = \frac{3x-2\sqrt{16,26^2+x^2}}{24\sqrt{16,26^2+x^2}}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_o = \frac{2.16,26}{\sqrt{5}} \approx 14,5434$

Lập bảng biến thiên, ta suy ra $\min\limits_{x\in(0;25,68)} f(x) = f(x_o) = 3,669\ s$

Suy ra $MB = 25,68 - 14,5434 \approx 11,14$ km .

Câu 29. Đáp án C

$f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{120}{(t+5)^2}$. Khi đó $ycbt\Leftrightarrow\dfrac{120}{(t+5)^2}=0,048=\dfrac{6}{125}$

$\Rightarrow 2500=(t+5)^2\Leftrightarrow t+5=50\Leftrightarrow t=45$.

Như vậy đến năm 1970 + 45 = 2015 thì đạt tốc độ tăng dân số 0,048 người/năm.

Câu 30. Đáp án B

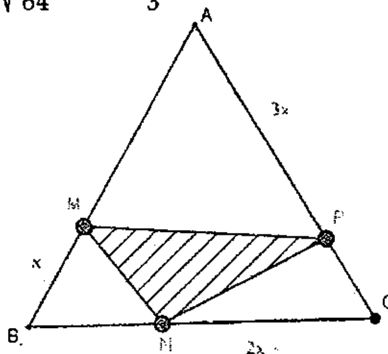
[redacted]

Cách 1: Đặt $f(y)=\dfrac{9V}{4y}+8y^2$ (khảo sát hàm tìm $min\,f(y)$)

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy $\dfrac{9V}{4y}+8y^2=\dfrac{9V}{8y}+\dfrac{9V}{8y}+8y^2\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{81V^2}{8}}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{9V}{8y}=8y^2\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{\dfrac{9V}{64}}\Rightarrow x=\dfrac{4}{3}\approx 1,333\Rightarrow 1,5$

Câu 31. Đáp án A



$S_{\Delta MNP}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta AMP}-S_{\Delta BMN}-S_{\Delta CNP}$

Trong đó $S_{\Delta ABC}=\dfrac{12^2\sqrt{3}}{4}$;

$S_{\Delta BMN}=\dfrac{1}{2}BM.BN.sin60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(12x-2x^2\right)$

$S_{\Delta CNP}=\dfrac{1}{2}CN.CP.sin60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(24x-6x^2\right)$

$S_{\Delta AMP}=\dfrac{1}{2}AM.AP.sin60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(36x-3x^2\right)$

Vậy $S_{\Delta AMN}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(11x^2-72x+144\right)$

Khảo sát $f(x)=11x^2-72x+144; x\in[0;12]\rightarrow Minf(x)=\dfrac{288}{11}, khi: x=\dfrac{36}{11}$

Câu 32. Đáp án D

[redacted]

Câu 33. Đáp án D

Gọi vận tốc bơi của chiến sĩ là $v>0$ thì vận tốc chạy là $2v$

Độ dài cần ơi là $AM=x$ ta có điều kiện $155\leq x\leq\sqrt{1000^2+155^2}$

Thời gian bơi là $\dfrac{x}{v}$. Độ dài $HM=\sqrt{x^2-155^2}, BM=1000-\sqrt{x^2-155^2}$

Thời gian chạy bộ là $\dfrac{1000-\sqrt{x^2-155^2}}{2v}$

Tổng thời gian $f(x)=\dfrac{1}{2v}\left(2x+1000-\sqrt{x^2-155^2}\right), v>0$

$f'(x)=\dfrac{1}{2v}\left(2-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-155^2}}\right)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{310}{\sqrt{3}}$

Lập bảng biến thiên, ta suy ra $\min f(x)=f\left(\dfrac{310}{\sqrt{3}}\right)=178,9786$ m

Câu 34. Đáp án

Đặt $x=HM\left(0\le x\le 4,1\right) \Rightarrow \begin{cases} AM=\sqrt{x^2+1,44} \\ BN=\sqrt{\left(4,1-x\right)^2+2,25} \end{cases}$

Gọi a là số tiền để làm 1 km đường bên bờ có điểm A. Khi đó chi phí để làm hai đoạn AM và BN là: $f\left(x\right)=a\sqrt{x^2+1,44}+1,3a\sqrt{\left(4,1-x\right)^2+2,25}$.

Bài toán trở thành tìm $\min\limits_{x\in(0;4,1)} f\left(x\right)=?$

Ta có $f'(x)=a\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1,44}}-\dfrac{1,3(4,1-x)}{\sqrt{(4,1-x)^2+2,25}}\right)$

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2\left[(4,1-x)^2+2,25\right]=1,3^2(4,1-x)^2\left(x^2+1,44\right)$

(Dùng chức năng của MTCT giải được $x_o\approx 2,6303$)

Lập bảng biến thiên ta suy ra $\min\limits_{x\in(0;4,1)} f\left(x\right)=f\left(x_o\right)=6,222a$

Câu 35. Đáp án A

Giả sử sợi dây có chiều L ta gọi x là độ dài của cạnh hình tam giác đều. Khi đó ta có chiều dài phần dây làm thành tam giác là $3x$

Chiều dài phần dây làm thành hình tròn là $L-3x \Rightarrow \dfrac{L-3x}{2\pi}$ chính là bán kính của đường tròn.

Khi đó ta có: $S=S_{tron}+S_{tamgiac}=\pi\left(\dfrac{L-3x}{2\pi}\right)^2+\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\left(9+\pi\sqrt{3}\right)x^2-6Lx+L^2}{4\pi}$

Xét $f(x)=\left(9+\pi\sqrt{3}\right)x^2-6Lx+L^2$. Ta có $\begin{cases} f(x)\ \text{parabol} \\ a=9+\pi\sqrt{3}>0 \end{cases} \Rightarrow x_{max}=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{3L}{9+\pi\sqrt{3}}$

Do đó ta có $x=\dfrac{3L}{9+\pi\sqrt{3}}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 36. Đáp án C

Giả sử sợi dây có chiều L ta gọi x là độ dài của cạnh hình tam giác đều. Khi đó ta có chiều dài phần dây làm thành tam giác là $3x$

Chiều dài cạnh hình vuông là $\dfrac{x}{2}$ nên đoạn dây uốn thành hình vuông là $4\dfrac{x}{2}=2x$

Chiều dài phần dây làm thành hình tròn là $L-5x \Rightarrow \dfrac{L-5x}{2\pi}$ chính là bán kính của đường tròn.

Khi đó ta có: $S=S_{tron}+S_{tamgiac}+S_{vuong}=\pi\left(\frac{L-5x}{2\pi}\right)^2+\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{x^2}{4}=\frac{\left(25+\pi\sqrt{3}+\pi\right)x^2-10Lx+L^2}{4\pi}$

Xét $f(x)=\left(25+\pi\sqrt{3}+\pi\right)x^2-10Lx+L^2$.

Ta có $\begin{cases} f(x): parabol \\ a=26+\pi\sqrt{3}+\pi>0 \end{cases} \Rightarrow x_{max}=\frac{-b}{2a}=\frac{5L}{25+\pi+\pi\sqrt{3}}$

Do đó ta có $x=\frac{5L}{25+\pi+\pi\sqrt{3}}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 37. Đáp án

Áp dụng công thức giải nhanh

$x=\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\xrightarrow[b=50]{a=80}x=\frac{130-\sqrt{80^2-80.50+50^2}}{6}=10$

Câu 38. Đáp án C

Gọi x,y lần lượt là chiều rộng và chiều dài của đáy hình hộp. $(0<x<y)$

Khi đó ta có $V=96.000=60xy\Rightarrow x=\frac{1600}{y}$

Ta có chi phí hoàn thành bể cá là $C(x)=70.10^3.S_{xq}+100.10^3.S_{day}$

$\Rightarrow C(x)=70.10^3.(2.60x+2.60y).10^{-4}+16000=840(x+y)+16000$

Ta có: $x+y\geq 2\sqrt{xy}=2\sqrt{1600}=80$ Do đó ta có $C(x)\geq 840.80+16000=83200$

Câu 39. Đáp án C

$S=\frac{1}{2}(2a+2x)\sqrt{a^2-x^2}\,(0<x<a)$

$S=(a+x)\sqrt{a^2-x^2}$. Xét $f(x)=(a+x)\sqrt{a^2-x^2}$. Bài toán trở thành tìm $\underset{(0;a)}{min} f(x)$

Ta có $f'(x)=\sqrt{a^2-x^2}+\frac{(a+x)(-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{(a+x)(a-2x)}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-a\,(ktm) \\ x=\frac{a}{2}\in(0;a) \end{array}\right.$ Lập bảng biến thiên ta suy ra $\underset{x\in(0;a)}{min} f(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$

Câu 40. Đáp án A

(Bạn đọc có thể tham khảo thêm bài tập tương tự số 2 (thuộc bài toán số 5, chương I)

Gọi C′, D′ lần lượt là điểm đối xứng của C và D qua cạnh AB.

Ta có $MC+MD=MC'+MD\geq DC'=\sqrt{AB^2+(BD+BD')^2}=8\sqrt{34}$

Áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{MB}{C'D'}=\frac{BD}{DD'}\Leftrightarrow\frac{MB}{AB}=\frac{30}{40}=\frac{3}{4}\Rightarrow MB=18\Rightarrow MA=6$

Câu 41. Đáp án C

Gọi d_1,d_2 lần lượt là khoảng cách các vật A và B đến 0 lúc đầu $(t=0)$

Đồng thời $d=AB$. Gọi t' là thời điểm mà d_{min}. Khi đó A ở A′. B ở B′ như hình vẽ

Kí hiệu góc $\measuredangle B'A'O=\beta,\measuredangle A'B'O=\gamma$.

Áp dụng định lý hàm sin trong tam giác $\Delta A'B'O$ ta có:

$\frac{d}{sin30}=\frac{OA'}{sin\gamma}=\frac{OB'}{sin\beta}\Leftrightarrow 2d=\frac{d_1-AA'}{sin\gamma}=\frac{d_2-BB'}{sin\beta}\Leftrightarrow 2d=\frac{d_1-v_1t}{sin\gamma}=\frac{d_2-v_2t}{sin\beta}(*)$

Do $v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{3}}$ và áp dụng $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{C-A}{D-B}$, ta có:

$(*) \Leftrightarrow 2d = \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{\sqrt{3}\sin\beta - \sin\gamma}$ mà $\sin\beta = \sin(180^0 - \beta) = \sin(30^0 + \gamma)$

Do đó ta có $d = \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{2\left[\sqrt{3}\sin(30^0+\gamma) - \sin\gamma\right]} = \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{\sqrt{3}\cos\gamma + \sin\gamma}$

Xét $f(\gamma) = \sqrt{3}\cos\gamma + \sin\gamma$. Ta có $d_{min} \Leftrightarrow f(\gamma)_{max}$

Cách 1: khảo sát hàm $f(\gamma)$ (xin dành cho bạn đọc)

Cách 2: áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$\left|\sqrt{3}\cos\gamma + \sin\gamma\right| \le \sqrt{3+1}\sqrt{\cos^2\gamma + \sin^2\gamma} = 2 \Rightarrow -2 \le f(\gamma) \le 2 \Rightarrow max\, f(\gamma) = 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan\gamma = \tan 30^0 \Leftrightarrow \gamma = 30^0$ và khi đó $\beta = 120^0$

Khi đó ta có $\frac{d_2}{\sin 30^0} = \frac{d_1}{\sin 30^0} = \frac{d}{\sin 120^0} \Rightarrow d_2 = \frac{\sin 120^0}{\sin 30^0}d_1 = \sqrt{3}d_1 = 90\ (m)$

Câu 42. Đáp án A

$$U_R + U_L = I(R + Z_L) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}}(R + Z_L) = \frac{U}{\sqrt{\underbrace{\frac{R^2 + Z_L^2}{(R+Z_L)^2}}_{y(R)}}}$$

Để $(U_R + U_L)_{MAX} \longrightarrow y(R)_{MIN}$ với $y(R) = \frac{R^2 + Z_L^2}{(R+Z_L)^2}\ (R>0)$

Khi đó $y'(R) = \frac{2R(R+Z_L)^2 - 2(R^2+Z_L^2)(R+Z_L)}{(R+Z_L)^4} = \frac{2R(R+Z_L) - 2(R^2+Z_L^2)}{(R+Z_L)^3}$

$y'(R) = 0 \Leftrightarrow 2R^2 + 2RZ_L - 2R^2 - 2Z_L^2 = 0 \Leftrightarrow 2Z_L(R - Z_L) = 0 \Leftrightarrow \boxed{R = Z_L}$

Dựa vào bảng biến thiên (họ sinh tự vẽ) ta suy ra $y_{min} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow R = Z_L$

Do đó $\boxed{(U_R + U_L)_{MAX} = U\sqrt{2} \Leftrightarrow R = Z_L} \Rightarrow (U_R + U_L)_{MAX} = 100\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{A}$

Câu 43. Đáp án B

Độ dài quãng đường mà hai canô đi được sau thời gian t lần lượt là: $\begin{cases} AA' = v_1 t = 24t \\ BB' = v_2 t = 18t \end{cases}$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác $A'B'B$ vuông tại B ta có:

$A'B'^2 = A'B^2 + BB'^2 = (AB - AA')^2 + BB'^2 = (1 - 24t)^2 + (18t)^2$

Xét $f(t) = 900t^2 - 48t + 1$. Bài toán trở thành tìm $min\, f(t) = ?$

Ta có $\begin{cases} f(t)\ Parabol \\ a = 900 > 0 \end{cases} \Rightarrow x_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{48}{2.900} = \frac{2}{75} \Rightarrow min\, f(t) = f\left(\frac{2}{75}\right) = 0{,}36$

Vậy khi đó 2 ca nô cách nhau 1 khoảng ngắn nhất là $d = A'B' = 0{,}6km = 600m$

Câu 44. Đáp án D

Giả sử sợi dây có chiều L ta gọi x là độ dài của cạnh hình tam giác đều. Khi đó ta có

Chiều dài phần dây làm thành tam giác là $3x$

Chiều dài phần dây làm thành hình vuông là $L-3x \Rightarrow \frac{L-3x}{4}$ chính là chiều dài cạnh của hình vuông.

Khi đó ta có: $S = S_{vuong} + S_{tamgiac} = \frac{(L-3x)^2}{16} + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(9+4\sqrt{3})x^2 - 6Lx + L^2}{16}$

Xét $f(x) = (9+4\sqrt{3})x^2 - 6Lx + L^2$. Ta có $\begin{cases} f(x): parabol \\ a = 9+4\sqrt{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{3L}{9+4\sqrt{3}}$

Do đó ta có $x = \frac{18}{9+4\sqrt{3}}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 45. Đáp án D

$C(t) = 100\left(e^{-0,4t} - e^{-0,6t}\right) \Rightarrow C'(t) = 100\left(-0,4e^{-0,4t} + 0,6e^{-0,6t}\right)$

Xét $C'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{0,2t} = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 5\ln\frac{3}{2} \approx 2,027$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $max\,C(t) = C\left(5\ln\frac{3}{2}\right)$.

Câu 46. Đáp án C

Theo đề: $a = 2b \Rightarrow b = \frac{a}{2} \Rightarrow V = a.b.h = \frac{1}{2}a^2h = 288 \Rightarrow a = \frac{24}{\sqrt{h}}$

Diện tích xung quanh của hồ cá: $S = 3ah + \frac{a^2}{2} = 3h.\frac{24}{\sqrt{h}} + \frac{288}{h} = 72\sqrt{h} + \frac{288}{h}$

Xét hàm số $f(t) = 72t + \frac{288}{t^2}$ với $t = \sqrt{h} \Rightarrow t \geq 3$

$\Rightarrow f'(t) = 72 - \frac{576}{t^3} > 0\ \forall t \geq 3$

Hàm số đồng biến trên $[3;+\infty)$ nên $\min\limits_{[3;+\infty)} f(t) = f(3) \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow h = 9 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow b = 4$

Vậy $a = 8cm, b = 4cm, h = 9cm$.

Câu 47. Đáp án D

Gọi t là thời gian của con bọ đi được

Ta có $0 < t < \frac{L}{u}$ và đồng thời $t = \frac{L}{v}$ với *L là chiều dài thanh cứng.*

Khi B di chuyển một đoạn $S = vt$ thì con bọ đi được $L = u.t$

Độ cao mà nó đạt được khi đó là $h = L\sin a = ut\frac{\sqrt{L^2 - S^2}}{L} = \frac{u}{L}\sqrt{L^2t^2 - v^2t^4}$

Đặt $f(t) = L^2t^2 - v^2t^4$. Bài toán trở thành tìm $max\,f(t) = ?$

Ta có $f'(t) = 2L^2t - 4v^2t^3, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{L^2}{2v^2} \Rightarrow t = \frac{L}{v\sqrt{2}}$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $max\,f(t) = f\left(\frac{L}{v\sqrt{2}}\right) = \frac{L^2}{2v}$.

Câu 48. Đáp án D

$C(t) = \frac{0,28t}{t^2+4} \Rightarrow C'(t) = \frac{0,28.(4-t^2)}{(t^2+4)^2}$. Khi đó $C'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $\max_{t\in(0;24)} C(t) = 2$

Câu 49. Đáp án A

Tóm tắt bài toán: $MP: \underbrace{----\boxed{R}------}_{MN}.\underbrace{--\boxed{L}-\boxed{C}-\boxed{R_x}---}_{NP}(R_x \nearrow)$

Yêu cầu $R_x \to R \Rightarrow U_{LCR_x} \to MIN \xrightarrow{?} \cos\varphi = ?$

Ta có: $U_{LCR_x} = I\sqrt{R_x{}^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \dfrac{U}{\sqrt{(R+R_x)^2 + (Z_L - Z_C)^2}}\sqrt{R_x{}^2 + (Z_L - Z_C)^2}$

$$\Rightarrow U_{LCR_x} = \frac{U}{\sqrt{\dfrac{(R+R_x)^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R_x{}^2 + (Z_L - Z_C)^2}}} = \frac{U}{\sqrt{1 + \underbrace{\dfrac{R^2 + 2RR_x}{R_x{}^2 + (Z_L - Z_C)^2}}_{f(R_x = x)}}}$$

Vậy $(U_{LCR_x})_{min} \Leftrightarrow f(x)_{max}$. Xét $f(x) = \dfrac{2Rx + R^2}{x^2 + (Z_L - Z_C)^2}$ $(x > 0)$

$$f'(x) = \frac{2R\left(x^2 + (Z_L - Z_C)^2\right) - 2x.(2Rx + R^2)}{\left(x^2 + (Z_L - Z_C)^2\right)^2} = \frac{2R\left(-x^2 - Rx + (Z_L - Z_C)^2\right)}{\left(x^2 + (Z_L - Z_C)^2\right)^2}.$$

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + Rx - (Z_L - Z_C)^2 = 0$. $\Delta = R^2 + 4(Z_L - Z_C)^2 > 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-R + \sqrt{R^2 + 4(Z_L - Z_C)^2}}{2}\ (tm) \\ x_2 = \dfrac{-R - \sqrt{R^2 + 4(Z_L - Z_C)^2}}{2} < 0\ (ktm) \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{R_x = \frac{\sqrt{R^2 + 4(Z_L - Z_C)^2} - R}{2}}$$

Bảng biến thiên.

x	0		x_1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\dfrac{R^2}{(Z_L - Z_C)^2}$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	0



Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max f(x) = f(x_1) \Leftrightarrow \boxed{R_x = \dfrac{\sqrt{R^2 + 4(Z_L - Z_C)^2} - R}{2}}$

Như vậy khi đó ta có $2R_x + R = \sqrt{R^2 + 4(Z_L - Z_C)^2} \Leftrightarrow 4R_x{}^2 + 4R_xR = 4(Z_L - Z_C)^2$

$\Rightarrow \boxed{R_x{}^2 + R_xR = (Z_L - Z_C)^2}$.

Khi đó $\tan\varphi = \dfrac{Z_L - Z_C}{R + R_x} \Leftrightarrow (\tan\varphi)^2 = \dfrac{(Z_L - Z_C)^2}{(R+R_x)^2} = \dfrac{R_x{}^2 + R_xR}{(R+R_x)^2} \xrightarrow{R=R_x} (\tan\varphi)^2 = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow (\cos\varphi)^2 = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,816$.

Câu 50. Đáp án C

Đặt $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Khi đó $V_{ABCD.A'B'C'D'} = abc$.

Và $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên giả sử $a > b$

Theo giả thiết, ta có $2.S_{ABCD} + 2.S_{ABB'A'} + 2.S_{BCC'B'} = 36$.

$\Leftrightarrow S_{ABCD} + S_{ABB'A'} + S_{BCC'B'} = 18 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 18$.

Xét tam giác $AA'C'$ vuông tại A', ta có $AC'^2 = AA'^2 + A'C'^2$.

Mà xét tam giác $A'B'C'$ vuông tại B', có $A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2$.

[redacted]

Áp dụng với $\begin{cases} m = a + b + c = 6\sqrt{2} \\ n = ab + bc + ca = 18 \end{cases}$ ta được:

$\left|108\sqrt{2} - 27p\right| \le 108\sqrt{2} \Leftrightarrow 27p - 108\sqrt{2} \le 108\sqrt{2} \Leftrightarrow p \le 8\sqrt{2}$

Hay nói cách khác abc đạt giá trị lớn nhất tại $8\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4\sqrt{2}, b = c = \sqrt{2}$.

Câu 51. Đáp án A

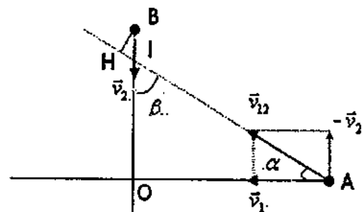
Thể tích khối hộp là $V = x^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{x^2}$

Khi đó diện tích của mảnh cactong dùng làm hộp là $S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + \dfrac{4V}{x}$

[redacted]

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 2V \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V} = 10$

Câu 52. Đáp án B



Gọi t là thời gian đi được của 2 vật A và B

Khi đó vật A ở A', vật B ở B' và khoảng cách là

$A'B'^2 = OA'^2 + OB'^2 = (OA - AA')^2 + (OB - BB')^2$

$AB^2 = (4,4 - 50t)^2 + (4 - 30t)^2 = 3400t^2 - 680t + 35,36$

Ta có $f(t) = 3400t^2 - 680t + 35,36 \longrightarrow \begin{cases} f(t): Parabol \\ a = 3400 > 0 \end{cases} \Rightarrow t_{min} = \dfrac{}{2a} = \dfrac{}{10}$

Và khi đó $\left(A'B'^2\right)_{min} = min\, f(t) = f(0,1) = \dfrac{34}{25} \Rightarrow A'B' = \dfrac{\sqrt{34}}{5}$

Câu 53. Đáp án A

Gọi là H là trung điểm AB.

Trước tiên ta xác định $\overrightarrow{E_M} = \overrightarrow{E_{1M}} + \overrightarrow{E_{2M}}$ với $E_{1M} = E_{2M} = k\dfrac{q}{d^2 + x^2}$

Dùng quy tắc tổng hợp vecto $\overrightarrow{E_M}$ vuông góc $\overline{AB}$ và hướng ra xa AB

Ta có $E_M = 2E_{1M}.cos\measuredangle AMH = \dfrac{2kq}{d^2 + x^2}.\dfrac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}} = 2kq.\dfrac{x}{\sqrt{\left(d^2 + x^2\right)^3}}$

Cách 1: Xét hàm $f(x)=\dfrac{x}{\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)^3}$, bài toán trở thành tìm $max\, f(x)=?$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

Ta có $d^2+x^2=\dfrac{d^2}{2}+\dfrac{d^2}{2}+x^2\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{d^4x^2}{4}}\Rightarrow\sqrt{\left(d^2+x^2\right)^3}\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}d^2x$

$\Rightarrow\dfrac{x}{\sqrt{\left(d^2+x^2\right)^3}}\le\dfrac{2}{3\sqrt{3}d^2}\Rightarrow E_M\le\dfrac{4kq}{3\sqrt{3}d^2}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{d}{\sqrt{2}}$

Câu 54. Đáp án A

Gọi cạnh bên của lăng trụ đều là $a>0$; cạnh đáy của lăng trụ đều là $b>0$.

Ta có $V=a.b^2=2\Leftrightarrow a=\dfrac{2}{b^2}$. Lại có diện tích của miếng tôn cần sử dụng là

$S_{tp}=S_{xq}+S_{2đáy}=2\left(2ab+b^2\right)=2\left(\dfrac{4}{b}+b^2\right)$

Xét $f(b)=2\left(\dfrac{4}{b}+b^2\right)$. Bài toán trở thành tìm $\min\limits_{b>0} f(b)=?$

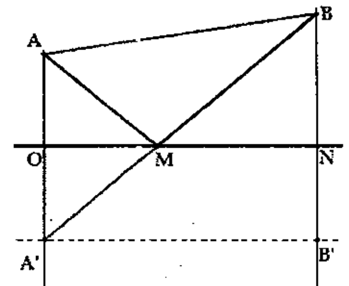
Ta có $f'(b)=-\dfrac{8}{b^2}+4b$. Khi đó $f'(b)=0\Leftrightarrow b=\sqrt[3]{2}$.

Lập bảng biến thiên ta có:

b	0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$f'(b)$		$-$	0	$+$	
$f(b)$	$+\infty$	↘	$4\sqrt[3]{4}$	↗	$+\infty$

Do đó lăng trụ tứ giác đều trên có cạnh đáy hình vuông là $\sqrt[3]{2}$ và cạnh bên bằng $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 55. Đáp án B



Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (d) và B' là hình chiếu vuông góc của A trên BN.

Gọi M là điểm thuộc cạnh ON

(là vị trí xây trạm bơm nước)

Khi đó ta có $AM+MB=MA'+MB\ge A'B$

Do đó $(AM+MB)_{min}=A'B=\sqrt{BB'^2+A'B'^2}$

$=\sqrt{(BN+OA')^2+AB^2-(BN-AO)^2}$

$\Rightarrow A'B=\sqrt{(450+200)^2+600^2-(450-200)^2}=\sqrt{608089}\approx 849\ m$.

Câu 56. Đáp án C

Phân tích: ta có $200=(v-8)t\Rightarrow t=\dfrac{200}{v-8}(v>8)=$

Khi đó $E(v) = cv^3\dfrac{200}{v-8}$ (do c là hằng số dương nên để năng lượng tiêu hao ít nhất thì $f(v) = \dfrac{200v^3}{v-8}$ nhỏ nhất. Xét hàm số $f(v)$ liên tục trên khoảng $(8;+\infty)$

Ta có $f'(v) = 200\dfrac{3v^2(v-8)-v^3}{(v-8)^2} = 200\dfrac{2v^3-24v^2}{(v-8)^2} \xrightarrow{f'(v)=0} v=12$

Lập bảng biến thiên ta có $\min\limits_{v\in(8;+\infty)} f(v) = f(12)$

Câu 57. Đáp án C

Theo kết quả ***bài toán 11 (phần lý thuyết)***: thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem là: $V_{tru} = \pi r^2 h = \pi h\left(R^2 - h^2\right) \xleftrightarrow{h=\frac{R}{\sqrt{3}}} \pi\dfrac{R}{\sqrt{3}}\left(R^2 - \dfrac{R^2}{3}\right) = \dfrac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} \xleftrightarrow{R=5\sqrt{3}} V_{tru} = 250\pi$

Câu 58. Đáp án A

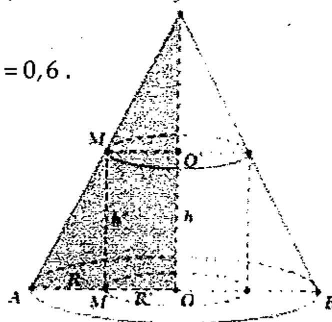
$s(t) = 6t^2 - t^3 \Rightarrow v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2 \xrightarrow[MTCT]{Parabol} \max v(t) = 12 \Leftrightarrow t = 2$

Câu 59. Đáp án C

Ta có

$$\begin{cases} V = abc = 1,296 \Rightarrow c = \dfrac{1,296}{ab} \\ S = ab + 2ac + 3bc \to min \end{cases} \Rightarrow S = ab + \dfrac{2.1,296}{b} + \dfrac{3.1,296}{a} \geq 3\sqrt[3]{ab\dfrac{2.1,296}{b}.\dfrac{3.1,296}{a}} = 2,16$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab = \dfrac{2V}{b} = \dfrac{3V}{a} \Rightarrow \begin{cases} a = 1,8 \\ b = 1,2 \end{cases}$ và do đó $c = 0,6$.



Câu 60. Đáp án D

$\Delta SAO: MM'//SO \Rightarrow \dfrac{MM'}{SO} = \dfrac{AM'}{AO} \Leftrightarrow \dfrac{h'}{h} = \dfrac{R-r}{R}$

Do đó $h' = \dfrac{h}{R}(R-r)$, $V_{tru} = \pi r^2 h' = \pi r^2\dfrac{h}{R}(R-r)$

Cách 1: khảo sát hàm

Cách 2: dùng BĐT Cauchy: Ta có: $V_{tru} = \pi r^2 h' = \pi r^2\dfrac{h}{R}(R-r) = \dfrac{\pi h}{2R}r.r.2(R-r)$

Lại có $\sqrt[3]{r.r.2(R-r)} \underset{Cauchy}{\leq} \dfrac{r+r+2(R-r)}{3} = \dfrac{2R}{3} \Rightarrow V_{tru} \leq \dfrac{\pi h}{2R}.\dfrac{8R^3}{27} = \dfrac{4\pi R^2 h}{27}$

$\Rightarrow \max V_{tru} = \dfrac{4\pi R^2 h}{27} = V_1$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow r = 2(R-r) \Rightarrow r = \dfrac{2R}{3}$)

Đồng thời $V_2 = V_{non} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{9}$

Câu 61. Đáp án D

Số cá anh Phong thả trong vụ vừa qua là $50.20 = 1000$ (con).

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phẩm là $\dfrac{1500}{1000} = 1,5kg/con$

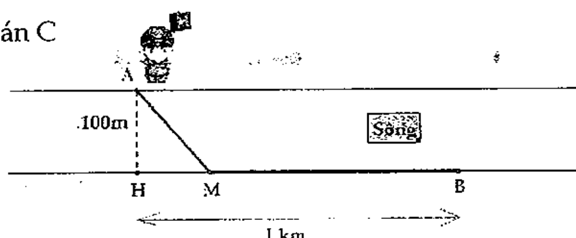
Gọi $x > 0$ là số cá ông cần thả ít đi cho vụ tới nên sẽ tăng $0,0625x$ kg/con

Ta có phương trình tổng khối lượng cá thu được $T = f(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -0,125x + 61 = 0 \Rightarrow x = 488 \\ f''(x) = -0,125 \end{cases} \Rightarrow \max f(x) = 16384 \Leftrightarrow x = 488.$$

Vậy ở vụ sau ông chỉ cần thả $1000 - 488 = 512$ con cá giống.

Câu 62. Đáp án C



Gọi M là vị trí để vận động viên cần bơi từ A đến. Ta đặt $HM = x, (0 < x < 1000)$

Khi đó ta có $AM = \sqrt{x^2 + 100^2}$ và thời gian bơi là $\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{v}$

Đồng thời $MB = 1000 - x$ và thời gian chạy là $\frac{1000-x}{2v}$

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+100^2}}{v} + \frac{1000-x}{2v}$

Khảo sát hàm ta suy ra $\min\limits_{x\in(0;1000)} f(x) = f\left(\frac{100}{\sqrt{3}}\right)$

Do đó ta có $AM = \sqrt{x_0{}^2 + 100^2} = \frac{200}{\sqrt{3}} \approx 115,47\ m$ và $f(x) = \frac{200}{v\sqrt{3}} + \frac{1000 - \frac{100}{\sqrt{3}}}{2v} \approx \frac{586.6}{v}$

Xét lại nếu bơi từ A đến B ta có $S_{AB} = \frac{\sqrt{1000^2+100^2}}{v} \approx \frac{1004,98}{v}$

Còn nếu bơi từ A đến H rồi H đến B $t_{AHB} = \frac{100}{v} + \frac{1000}{2v} = \frac{600}{v}$

So sánh 3 cách đi trên ta có với $AM = \frac{200}{\sqrt{3}}$ thì thời gian đến mục tiêu là ngắn nhất.

Lưu ý: sau khi thiết lập hàm, ta có thể lấy đáp án thay lên để kiểm tra và để thuận tiện cho việc tính toán ta có thể giả sử $v = 1$

Câu 63. Đáp án B

Gọi x $(1 \le x \le 20, x \in \mathbb{N})$ là số máy sử dụng và $C(x)$ là hàm tổng chi phí sản xuất tương ứng.

Chi phí lắp đặt các máy là $80x$

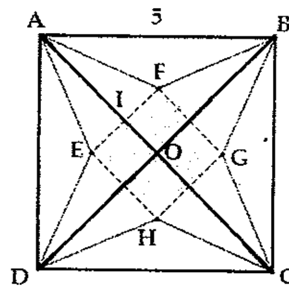
Chi phí vận hành các máy là $\frac{400000}{200x}.5,76$

Tổng chi phí = Chi phí lắp đặt + Chi phí vận hành $\Rightarrow C(x) = 80x + \frac{11520}{x}$

Ta có $C'(x) = 80 - \frac{11520}{x^2} \Rightarrow C'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = -12 \end{array}\right.$

Lập BBT ta thấy tại $x = 12$ chi phí sẽ nhỏ nhất, nhưng quá hạn định trong hợp đồng. Do đó, ta sẽ kiểm tra các giá trị lân cận lớn hơn 12 thì thấy rằng khi $x = 14$ sẽ đúng hạn định và mang lại chi phí thấp nhất. $C(14) = \frac{13600}{7} \approx 1943$

Câu 64. Đáp án D



Gọi $x = EF > 0$ là cạnh của đáy của mô hình.

Ta có $0 < x < 5\sqrt{2}$. (do $EF < BD = 5\sqrt{2}$

Khi đó ta có: $AI = \dfrac{5\sqrt{2} - x}{2}$

Đồng thời gọi h chiều cao của khối chóp tứ giác đều.

Ta có: $h = \sqrt{\dfrac{\left(5\sqrt{2} - x\right)^2}{4} - OE^2} = \sqrt{\dfrac{\left(5\sqrt{2} - x\right)^2}{4} - \dfrac{x^2}{2}}$

Khi đó thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}h.x^2 = \dfrac{1}{3}h = \dfrac{x^2}{3}\sqrt{\dfrac{\left(5\sqrt{2} - x\right)^2}{4} - \dfrac{x^2}{2}}$

Cách 1: khảo sát hàm (dành cho bạn đọc)

Cách 2: lấy đáp án thay lên ta nhận $x = 2\sqrt{2}$ (dm).

Câu 65. Đáp án D

Áp dụng công thức giải nhanh ta có $x = \dfrac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6} = 1$

Do đó $V = x.(8 - 2x)(5 - 2x) \xrightarrow{x=1} V = 18\text{ dm}^3$

Câu 66. Đáp án A

Đặt $x = BD, (0 < x < 5)$. Khi đó ta có thời gian đi từ $A \to C$ ta có:

$$t_{AC} = t_{AD} + t_{DC} = \frac{AD}{4} + \frac{DC}{5} = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{5 - x}{5} = f(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{x}{5} \xrightarrow{f'(x)=0} \frac{25}{16}x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow x = 4.$$

Lập bảng biến ta suy ra $\min\limits_{x \in (0;5)} f(x) = f(4) = 1,45h$.

Vậy muộn nhất thì Hoa phải đi trước $7,5h - 1,45h = 6,05h$ *hay* $6h03$ phút.

Câu 67. Đáp án B

Ta có x chính là chu vi của hình vuông, khi đó cạnh hình vuông là $\dfrac{x}{4}$

Đồng thời $60 - x$ chính là chu vi của đường tròn $\Rightarrow 60 - x = 2\pi r$ (với r là bán kính của đường tròn) $\Rightarrow r = \dfrac{60 - x}{2\pi}$

Do đó ta có: $S = S_{vuông} + S_{tròn} = \underbrace{\dfrac{x^2}{16} + \pi\dfrac{(60 - x)^2}{4\pi^2}}_{f(x)}$

Cách 1: khảo sát hàm ta nhận $x = 33,6$ thỏa yêu cầu bàt toán.

Cách 2: nhận xét hàm $f(x)$ là hàm có dạng hình parabol nên ta có thể dùng MTCT tìm cực trị.

Câu 68. Đáp án A

Gọi $x = SM, (0 < x < 8)$, Khi đó ta có $CM = \sqrt{4^2 + x^2}$

Và $MH = \sqrt{SF^2 + (HF - MS)^2} = \sqrt{11^2 + (8 - x)^2}$

Khi đó tổng quãng đường từ C đến H

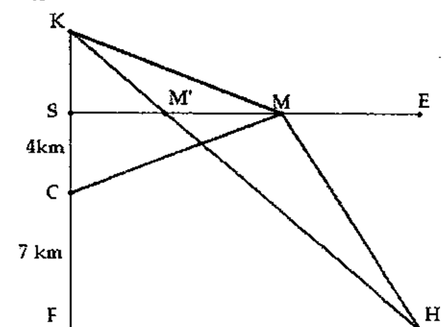
là $S = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{121 + (8 - x)^2}$

Cách 1: khảo sát hàm ta suy ra $\min S = 17$

Cách 2: dùng bất đẳng thức tam giác:

Gọi K là điểm đối xứng của C qua SE,

Khi đó ta có:



$$MC + MH = MH + KM \ge KH = \sqrt{(KS + SC + CF)^2 + FH^2} = 17$$

Câu 69. Đáp án B

Gọi a, b, c lần lượt là chiều cao, chiều dài và chiều rộng của hồ nước hình hộp chữ nhật

Ta có: $\begin{cases} b = 2c \\ 1,5 \le a \le 2 \\ abc = 100 \Rightarrow bc = \dfrac{100}{a} \end{cases}$

Khi đó $S = bc + 2ab + 2ac = \dfrac{100}{a} + 2\sqrt{200a} + 2\sqrt{50a} = \underbrace{\dfrac{100}{a} + 50\sqrt{2a}}_{f(a)}$

$$f'(a) = -\frac{100}{a^2} + \frac{50\sqrt{2}}{2\sqrt{a}} \xrightarrow{f'(a)=0} a = \sqrt[3]{\frac{800}{9}} \approx 2,81 \notin [1,5; 2]$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $\min S = \min f(2) = 110$.

Lưu ý: nếu không cẩn thận bạn đọc sẽ chọn đáp án A với lời giải như sau:

$S = bc + 2ab + 2ac \xleftarrow[a=\frac{50}{c^2}]{b=2c} S = 2c^2 + 4c\dfrac{50}{c^2} + 2c\dfrac{50}{c^2} = 2c^2 + \dfrac{300}{c}$

Khi đó $S = 2c^2 + \dfrac{150}{c} + \dfrac{150}{c} \underset{Cauchy}{\ge} 3\sqrt[3]{45000} \approx 106,706$. Do điểm khi đạt điểm rơi của bất đẳng thức thì điều kiện $1,5 \le a \le 2$ không thỏa mãn.

Câu 70. Đáp án C

$$P(x) = -0,02x^3 + 11,7x^2 + 240x - 1000 \Rightarrow P'(x) = -0,06x^2 + 23,4x + 240$$

Khi đó $P'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 400 > 0\,(tm) \\ x = -10 < 0\,(ktm) \end{array}\right.$. Do $x > 0$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $\max\limits_{x \in (0;+\infty)} P(x) = P(400)$

CHƯƠNG II: ỨNG DỤNG HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Các bài toán về hàm số lũy thừa hàm số mũ và hàm số logarit là các bài toán rất hay và có nhiều ứng dụng trong thực tế.

1. Các ứng dụng trong kinh tế: Bài toán lãi suất trong gửi tiền vào ngân hàng, bài toán vay – mua trả góp....

2. Các ứng dụng trong lĩnh vực đời sống và xã hội: Bài toán tăng trưởng về dân số....

3. Các ứng dụng trong lĩnh vực khoa học kỹ thuật: Bài toán liên quan đến sự phóng xạ, tính toán các cơn dư chấn do động đất, cường độ và mức cường độ âm thanh ....

Trước khi đọc các phần tiếp theo của tài liệu, các em thử một lần nhớ lại có khi nào ta từng đi theo bố (mẹ) vào ngân hàng: để gửi tiền tiết kiệm, hoặc vay tiền ngân hàng, hoặc làm một thẻ ATM mới... ở đó các em sẽ thấy được những bảng thông báo về lãi suất tiền gửi, lãi suất cho vay, các em nghe được các nhân viên ngân hàng tư vấn về hình thức gửi tiền (vay tiền) và cách tính lãi suất. Liệu có em nào thắc mắc tự hỏi rằng lãi suất là gì?có các hình thức tính lãi suất nào thường gặp? Câu trả lời sẽ có trong các phần tiếp theo của tài liệu. Trong tài liệu nhỏ này các em cũng tìm được những câu trả lời cho các câu hỏi như:

Dân số các quốc gia được dự báo tăng hay giảm bằng cách nào?

Độ to (nhỏ) của âm thanh được tính toán như thế nào?

....

Qua nội dung này, chúng ta sẽ biết vận dụng các kiến thức đã học về hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit vào để giải quyết một số bài toán thực tế liên quan các chủ đề nêu ở trên. Các chủ đề trong bài toán, được thể hiện qua các phần sau:

- ***Phần A: Tóm tắt lí thuyết và các kiến thức liên quan.***
- ***Phần B: Các bài toán ứng dụng thực tế.***
- ***Phần C: Các bài toán trắc nghiệm khách quan.***
- ***Phần D: Đáp án và hướng dẫn giải câu hỏi trắc nghiệm.***

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Trước hết chúng ta tìm hiểu một số khái niệm đơn giản sau.

1. Tiền lãi *là một khái niệm xem xét dưới hai góc độ khác nhau là người cho vay và người đi vay. Ở góc độ người cho vay hay nhà đầu tư vốn, tiền lãi là số tiền tăng thêm trên số vốn đầu tư ban đầu trong một giai đoạn thời gian nhất định. Khi nhà đầu tư đem đầu tư một khoản vốn, họ mong muốn sẽ thu được một giá trị trong tương lai, hơn giá trị đã bỏ ra ban đầu và khoản tiền chênh lệnh này được gọi là tiền lãi. Ở góc độ người đi vay hay người sử dụng vốn, tiền lãi là số tiền mà người đi vay phải trả cho người vay (là người chủ sở hữu vốn) để được sử dụng vốn trong một thời gian nhất định.*

2. Lãi suất: *Là tỷ số tiền lãi (nhận được) phải trả so với vốn (cho) vay trong 1 đơn vị thời gian*

Đơn vị thời gian có thể là năm, quý, tháng, ngày.

Lãi suất được tính bằng tỷ lệ phần trăm hoặc số lẻ thập phân.

Ví dụ: Một ngân hàng A có lãi suất cho tiền gửi tiết kiệm cho kỳ hạn 1 tháng là *0,65% một tháng.*

Nghĩa là ta hiểu nếu ban đầu ta gửi tiết kiệm vào ngân hàng A với số tiền là 100 triệu đồng thì sau một tháng số tiền lãi ta nhận được là $100.10^6 \times 0,65\% = 650.000$ *đồng.*

Bây giờ ta tìm hiểu một số loại lãi suất hay sử dụng trong các ngân hàng và các dịch vụ tài chính: lãi đơn, lãi kép, lãi kép liên tục.

Trong chủ đề này ta tìm hiểu về lãi đơn.

3. Lãi đơn là số tiền lãi chỉ tính trên số *vốn gốc* mà không tính trên số tiền lãi do số vốn gốc sinh ra trong một khoảng thời gian cố định. (Chỉ có vốn gốc mới phát sinh tiền lãi).

Bây giờ, hãy tưởng tượng ta cầm một khoản tiền 10.000.000 đồng đến gửi ngân hàng, sau mỗi tháng ta sẽ nhận được 0,5% của số tiền vốn 10.000.000 đồng đó. Quá trình tích vốn và sinh lãi có thể quan sát trong bảng sau:

Tháng	**Tổng vốn *(Đồng)***	**Tổng Lãi (nếu không rút)*(Đồng)***
1	10.000.000	0,5%.10.000.000 = 50.000
2	10.000.000	50.000 + 0,5%.10.000.000 = 100.000
3	10.000.000	100.000 + 0,5%.10.000.000 = 150.000

Như vậy, ta thấy rõ trong suốt quá trình trên tiền lãi ta có thêm hàng tháng là một hằng số, ngoài ra tiền vốn từ đầu chí cuối không đổi.

Bây giờ ta xét bài toán tổng quát sau: Ta đưa vào sử dụng vốn gốc ban đầu P_0 với mong muốn đạt được lãi suất r mỗikìtheo hình thức **lãi đơn**trong thời gian n kì. Vào cuối mỗi kì ta rút tiền lãi và chỉ để lại vốn. Tính tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) sau n kì.

➢ ***Chú ý:*** *Đơn vị thời gian của mỗi kì có thể là năm, quý, tháng, ngày.*

Ta theo dõi bảng sau:

Ở cuối kì	**Vốn gốc**	**Tiền lãi**	**Tổng vốn và lãicộng dồn ở cuối kì**
1	P_0	$P_0.r$	$P_0 + P_0r = P_0(1+r)$
2	P_0	$P_0.r$	$P_0 + P_0r + P_0r = P_0(1+2r)$
3	P_0	$P_0.r$	$P_0 + P_0r + 2P_0r = P_0(1+3r)$
4	P_0	$P_0.r$	$P_0 + P_0r + 3P_0r = P_0(1+4r)$
…	…	….	…..
n	P_0	$P_0.r$	$P_0 + P_0r + (n-1)P_0r = P_0(1+nr)$

Do đó, ta có thể tóm gọn lại công thức tính tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) sau n kì như sau:

$P_n = P_0.(1+nr),$ (1)

P_n là tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) sau n kì.

P_0 là vốn gốc.

r là lãi suất mỗi kì.

Bây giờ để hiểu rõ hơn về công thức (1) trong bài toán lãi đơn, các em qua phần tiếp theo: Các bài toán trong thực tế hay gặp.

B. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

DẠNG 1: CHO BIẾT VỐN VÀ LÃI SUẤT, TÌM TỔNG SỐ TIỀN CÓ ĐƯỢC SAU N KỲ

Phương pháp

- *Xác định rõ các giá trị ban đầu: vốn P_0, lãi suất r, số kỳ n.*
- *Áp dụng công thức $P_n = P_0.(1+nr)$, (1)*
- *Qua các bài toán cụ thể, sẽ minh họa rõ hơn cho phương pháp trên.*

Bài toán 1: Anh Lâm đi gửi ngân hàng với số tiền 120.000.000 đồng theo hình thức lãi đơn với lãi suất 5% một năm. Hỏi nếu anh giữ nguyên số tiền vốn như vậy thì sau 2 năm tổng số tiền anh Lâm rút được về từ ngân hàng là bao nhiêu?(Giả sử lãi suất hàng năm không đổi)



Ảnh minh họa: Nguồn internet

■ Phân tích bài toán

- Ta xác định giả thiết đề bài cho gì: Số tiền ban đầu $P_0 = 120.000.000$ đồng, hình thức gửi lãi đơn với lãi suất r = 5% một năm và gửi trong thời gian n = 2 năm.
- Đề bài yêu cầu tìm tổng số tiền anh Lâm rút được từ ngân hàng sau 2 năm, lúc này ta sử dụng trực tiếp công thức $P_n = P_0.(1+nr)$, (1)

Hướng dẫn giải

- Áp dụng công thức (1) ta tính được tổng số tiền anh Lâm rút được từ ngân hàng sau 2 năm là: $P_2 = 120.000.000 \times (1 + 2 \times 5\%) = 13.2000.000$ đồng.
- Cũng sau hai năm số tiền lãi mà anh Lâm thu được là: $132.000.000 - 120.000.000 = 12.000.000$ đồng.

■ Bình luận: ***Qua bài toán này ta cần lưu ý:***

Một là, *khi tính toán các yếu tố trong bài toán gửi tiền vào ngân hàng này các em cần lưu ý là dữ kiện ban đầu tính theo hình thức lãi suất nào: Lãi đơn hay loại lãi khác... từ đó xác định đúng công thức tính toán cho từng trường hợp.*

Hai là, *nếu lãi suất và thời hạn gửi không cùng đơn vị thời gian, ta phải biến đổi để chúng đồng nhất về thời gian rồi mới áp dụng công thức (1). Để hiểu rõ vấn đề này các em qua bài toán 2.*

Bài toán 2: Ông Bbỏ vốn 450.000.000 đồng,đầu tư vào một công ty bất động sản với lãi suất đầu tư 12% một năm (theo hình thức lãi đơn) trong vòng 2 năm 3 tháng. Xác định giá trị đạt được vào cuối đợt đầu tư.

■ **Phân tích bài toán**

- Ta xác định giả thiết đề bài cho gì: Số tiền ban đầu $P_0 = 450.000.000$ đồng, hình thức đầu tư lãi đơn với lãi suất $r = 12\% = 0,12$ một năm và đầu tư trong thời gian n = 2 năm 3 tháng. Như vậy trong bài này ta thời gian đầu tư chưa cùng đơn vị với lãi suất nên ta phải đổi chúng về cùng đơn vị thời gian. Trong bài này ta có thể đưa về đơn vị thời gian cùng là năm hoặc cùng là tháng.
- Đề bài yêu cầu tìm tổng số tiền ông B đạt được sau 2 năm 3 tháng, lúc này ta sử dụng trực tiếp công thức $P_n = P_0.(1+nr)$, (1)

Hướng dẫn giải

Do n = 2 năm 3 tháng = 27 tháng = $\frac{27}{12}$ năm. Ta có thể tính giá trị đạt được theo2 cách.

Cách 1: Đưa đơn vị thời gian cùng là năm

- Áp dụng công thức (1) ta tính được tổng số tiền ông B đạt được sau 2năm 3 tháng là: $P_n = 450.000.000 \times \left(1 + \frac{27}{12} \times 12\%\right) = 571.500.000$ đồng.

Cách 2:Đưa đơn vị thời gian cùng là tháng.

- Qui đổi lãi suất tháng: $r' = \frac{r}{12} = 1\%$ tháng
- Áp dụng công thức (1) ta tính được tổng số tiền ông B đạt được sau 2 năm 3 tháng là: $P_n = 450.000.000 \times (1 + 27 \times 1\%) = 571.500.000$ đồng.

■ **Bình luận:** ***Qua bài toán này ta cần lưu ý:***

Một là, khi tính toán các yếu tố trong bài toán đầu tư này các em cần lưu ý là dữ kiện ban đầu tính theo hình thức lãi suất nào: Lãi đơn hay loại lãi khác... từ đó xác định đúng công thức tính toán cho từng trường hợp.

Hai là, nếu lãi suất và thời hạn gửi không cùng đơn vị thời gian, ta phải biến đổi để chúng đồng nhất về thời gian rồi mới áp dụng công thức (1). Bây giờ các em cùng qua tìm hiểu dạng toán thứ 2.

DẠNG 2: CHO BIẾT VỐN VÀ LÃI SUẤT, TỔNG SỐ TIỀN CÓ ĐƯỢC SAU N KỲ. TÌM N

Phương pháp

- *Xác định rõ các giá trị ban đầu: vốn P_0, lãi suất r, tổng số tiền có được sau n kì.*
- *Áp dụng công thức* $P_n = P_0.(1+nr) \Leftrightarrow P_n = P_0 + P_0 nr \Leftrightarrow \boxed{n = \frac{P_n - P_0}{P_0 r}}$
- *Qua các bài toán cụ thể, sẽ minh họa rõ hơn cho phương pháp trên*

Bài toán 3: Với lãi suất 10% năm (theo hình thức lãi đơn) cho số vốn 25triệu đồng, nhà đầu tư A mong muốn thu được 32.125.000 đồng vào cuối đợt đầu tư. Vậy phải đầu tư trong bao lâu để đạt được giá trị như trên? (Giả sử lãi suất hàng năm không đổi)

■ Phân tích bài toán

- Ta xác định giả thiết đề bài cho gì: Số tiền ban đầu $P_0 = 25.000.000$ đồng, hình thức gửi lãi đơn với lãi suất $r = 10\%$ một năm và giá trị đạt được vào cuối đợt đầu tư là 32.125.000 đồng.
- Để tìm thời gian đầu tư trong bao lâu, xuất phát từ công thức (1) $P_n = P_0.(1+nr) \Rightarrow n = \frac{P_n - P_0}{P_0 r}$

Hướng dẫn giải

- Áp dụng công thức (1):

$$P_n = P_0.(1+nr) \Rightarrow n = \frac{P_n - P_0}{P_0 r} = \frac{32.125.000 - 25.000.000}{25.000.000 \times 10\%} = 2,85 \text{ năm} = 2 \text{ năm } 10 \text{ tháng } 6 \text{ ngày}$$

- Vậy phải đầu tư số vốn trong thời gian 2 năm 10 tháng 6 ngày để đạt được giá trị mong muốn.

DẠNG 3: CHO BIẾT VỐN, TỔNG SỐ TIỀN CÓ ĐƯỢC SAU N KỲ. TÌM LÃI SUẤT

Phương pháp

- *Xác định rõ các giá trị ban đầu: vốn P_0, tổng số tiền có được sau n kì, số kỳ n.*
- *Để tính lãi suất r. Từ công thức (1) ta có:* $P_n = P_0.(1+nr) \Leftrightarrow P_n = P_0 + P_0 nr \Leftrightarrow \boxed{r = \frac{P_n - P_0}{P_0 n}}$
- *Qua các bài toán cụ thể, sẽ minh họa rõ hơn cho phương pháp trên.*

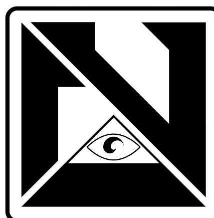
Bài toán 4: Bà Cúc gửi ngân hàng 60 triệu đồng trong 3 năm 4 tháng với lãi suất r% năm thì đạt kết quả cuối cùng là 75.210.000 đồng. Xác định r? (Biết rằng hình thức lãi suất là lãi đơn và lãi suất hàng năm không thay đổi)

■ Phân tích bài toán

- Ta xác định giả thiết đề bài cho gì: Số tiền ban đầu $P_0 = 60.000.000$ đồng, tổng số tiền có được sau 3 năm 4 tháng là 75.210.000 đồng.
- Đề bài yêu cầu tìm tìm lãi suất ta áp dụng công thức $P_n = P_0.(1+nr)$, (1)

Hướng dẫn giải

- 3 năm 4 tháng $= 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ năm
- Áp dụng công thức (1):



$$P_n = P_0.(1+nr) \Rightarrow r = \frac{P_n - P_0}{P_0 n} = \frac{75.210.000 - 60.000.000}{60.000.000 \times \frac{10}{3}} = 7,605\% \text{ một năm}$$

- Vậy lãi suất tiền gửi là $7,605\%$ một năm để đạt được giá trị mong muốn.

DẠNG 4: CHO BIẾT LÃI SUẤT, TỔNG SỐ TIỀN CÓ ĐƯỢC SAU N KỲ. TÌM VỐN BAN ĐẦU

Phương pháp

- *Xác định rõ các giá trị ban đầu: tổng số tiền có được saun kì, lãi suất r, số kỳ n.*
- *Tính số vốn ban đầu: Áp dụng công thức* $P_n = P_0.(1+nr) \Leftrightarrow \boxed{P_0 = \frac{P_n}{1+nr}}$.
- *Qua các bài toán cụ thể, sẽ minh họa rõ hơn cho phương pháp trên.*

Bài toán 5: Với lãi suất đầu tư 14% năm (theo hình thức lãi đơn) thì nhà đầu tư anh Tuấn phải bỏ ra số vốn ban đầu là bao nhiêu để thu được 244 triệu đồng trong thời gian 3 năm 9 tháng. (Giả sử lãi suất hằng năm không đổi)

■ Phân tích bài toán

- Ta xác định giả thiết đề bài cho gì: Số tiền thu được $P_n = 244.000.000$ đồng, hình thức đầu tư theo lãi đơn với lãi suất $r = 14\%$ một năm và đầu tư trong thời gian $n = 3$ năm 9 tháng.
- Đề bài yêu cầu tìm vốn đầu tư ban đầu của anh Tuấn, ta sử dụng công thức $P_n = P_0.(1+nr)$

Hướng dẫn giải

- 3 năm 9 tháng $= 3 + \frac{9}{12} = \frac{15}{4}$ năm
- Từ dụng công thức (1):

$$P_n = P_0.(1+nr) \Rightarrow P_0 = \frac{P_n}{1+nr} = \frac{244.000.000}{1 + \frac{15}{4} \times 14\%} = 160.000.000 \text{ đồng.}$$

- Vậy phải đầu tư $160.000.000$ đồng để đạt được giá trị mong muốn.

■ Bình luận: ***Qua các bài toán các em biết được.***

Một là, *hình thức lãi đơn là gì, từ đó có những kiến thức và hiểu biết nhất định để sau này áp dụng trong cuộc sống hàng ngày.*

Hai là, *biết tính toán qua lại các yếu tố trong công thức liên quan bài toán lãi đơn.*

Để hiểu rõ hơn các vấn đề nêu ở trên, các em làm các bài tập trắc nghiệm ở dưới nhé.

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Trong chủ đề này ta tìm hiểu về lãi kép.

2.1. Lãi kép là phương pháp tính lãi mà trong đó lãi kỳ này được nhập vào vốn để tính lãi kì sau. Trong khái niệm này, số tiền lãi không chỉ tính trên số vốn gốc mà còn tính trên số tiền lãi do số vốn gốc sinh ra.

- Thuật ngữ lãi kép cũng đồng nghĩa với các thuật ngữ như lãi gộp vốn, lãi ghép vốn hoặc lãi nhập vốn.

2.2. Công thức tính lãi kép.

- Trong khái niệm lãi kép, các khoản tiền lời phát sinh từ hoạt động đầu tư mỗi kì được tính gộp vào vốn ban đầu và bản thân nó lại tiếp tục phát sinh lãi trong suốt thời gian đầu tư.
- Bây giờ ta xét bài toán tổng quát sau: Ta đưa vào sử dụng vốn gốc ban đầu P_0 với mong muốn đạt được lãi suất r mỗi kì theo hình thức **lãi kép** trong thời gian n kì. Vào cuối mỗi kì ta rút tiền lãi và chỉ để lại vốn. Tính P_n tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) sau n kì.

Chú ý: Đơn vị thời gian của mỗi kì có thể là năm, quý, tháng, ngày.

- Ở cuối kì thứ nhất ta có:
  - Tiền lãi nhận được: $P_0.r$
  - Tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) cuối kì thứ nhất: $P_1 = P_0 + P_0.r = P_0(1+r)$.
- Do lãi nhập vào vốn đến cuối kì thứ hai ta có:
  - Tiền lãi nhận được: $P_1.r$
  - Tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) cuối kì thứ 2 là:
    $P_2 = P_1 + P_1.r = P_1(1+r) = P_0(1+r)(1+r) = P_0(1+r)^2$.

    ....
- Một cách tổng quát, sau n kì, tổng giá trị đạt được là $\boxed{P_n = P_0(1+r)^n, \ (2)}$

  Trong đó P_n là ***tổng giá trị đạt được (vốn và lãi)*** sau n kì.

  P_0 là vốn gốc.

  r là lãi suất mỗi kì.
- Ta cũng tính được ***số tiền lãi*** thu được sau n kì là: $\boxed{P_n - P_0}$

  Bây giờ để hiểu rõ hơn về công thức (2) trong bài toán **lãi kép**, các em qua phần tiếp theo: Các bài toán trong thực tế hay gặp.

B. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

DẠNG 1: CHO BIẾT VỐN VÀ LÃI SUẤT, TÌM TỔNG SỐ TIỀN CÓ ĐƯỢC SAU N KỲ

Phương pháp

- *Xác định rõ các giá trị ban đầu: vốn P_0, lãi suất r, số kỳ n.*
- *Áp dụng công thức* $\boxed{P_n = P_0(1+r)^n, \ (2)}$.
- *Qua các bài toán cụ thể, sẽ minh họa rõ hơn cho phương pháp trên.*

Bài toán 1: Ông A gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép.
a) Nếu theo kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm thì sau 2 năm người đó thu được số tiền là bao nhiêu?
b) Nếu theo kì hạn 3 tháng với lãi suất 1,65% một quý thì sau 2 năm người đó thu được số tiền là bao nhiêu?

■ **Phân tích bài toán**

- Đề bài yêu cầu tìm tổng số tiền ông A rút được từ ngân hàng sau 2 năm, lúc này ta sử dụng trực tiếp công thức $\boxed{P_n = P_0(1+r)^n,\ (2)}$.
- Ta phải xác định rõ: $P_0 = ..,r = ..,n = ...?$, từ đó thay vào công thức (2) tìm được P_n.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $P_0 = 10.000.000$ triệu, $n = 2$ năm, lãi suất trong 1 năm là $r = 7,56\%$ một năm.

Áp dụng công thức (2) ta tính được số tiền người đó thu được sau 2 năm là :

$P_2 = 10.000.000 \times (1 + 7,65\%)^2 \approx 11.569.000$ đồng.

b) Ta có $P_0 = 10.000.000$ triệu, $n = 2$ năm $= 8$ quý, lãi suất trong 1 quý là $r = 1,65\%$ một quý.

Áp dụng công thức (2) ta tính được số tiền người đó thu được sau 2 năm là:

$P_2 = 10.000.000 \times (1 + 1,65\%)^8 \approx 11.399.000$ đồng.

■ **Bình luận:** ***Qua bài toán này ta cần lưu ý:***

Một là, *khi tính toán các yếu tố trong bài toán gửi tiền vào ngân hàng này các em cần lưu ý là dữ kiện ban đầu tính theo hình thức lãi suất nào: Lãi đơn haylãi kép... từ đó xác định đúng công thức tính toán cho từng trường hợp.*

Hai là, *nếu lãi suất và thời hạn gửi không cùng đơn vị thời gian, ta phải biến đổi để chúng đồng nhất về thời gian rồi mới áp dụng công thức (2).*

Bài toán 2: Một người đầu tư 100 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi kép với lãi suất 13% một năm. Hỏi sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được bao nhiêu tiền lãi? (Giả sử rằng lãi suất hằng năm không đổi)

■ **Phân tích bài toán**

- Đề bài yêu cầu tìm số tiền lãi thu được sau 5 năm. Trước hết ta tính tổng số tiền người đó có được sau 5 năm, lúc này ta sử dụng trực tiếp công thức $\boxed{P_n = P_0(1+r)^n,\ (2)}$. Từ đó ta tính được số tiền lãi thu được sau 5 năm là: $P_n - P_0$
- Trong công thức (2) ta phải xác định rõ: $P_0 = ..;r = ..,n = ...?$, từ đó thay vào công thức (2) tìm được P_n.

Hướng dẫn giải

- Ta có $P_0 = 100$ triệu, $n = 5$ năm, lãi suất trong 1 năm là $r = 13\%$ một năm.
- Áp dụng công thức (2) ta tính được số tiền người đó thu được sau 5 năm là:

$P_5 = 100 \times (1 + 13\%)^5 \approx 184$ triệu đồng.

- Vậy số tiền lãi thu được sau 5 năm là: $P_5 - P_0 \approx 184 - 100 = 84$ triệu đồng.

Bài toán 3: Chị An gửi tiết kiệm 500.000.000 đồng vào ngân hàng A theo kì hạn 3 tháng và lãi suất 0,62% một tháng theo thể thức lãi kép.

a) Hỏi sau 5 năm chị An nhận được số tiền là bao nhiêu (cả vốn và lãi) ở ngân hàng, biết rằng chị không rút lãi ở tất cả các kì trước đó.

b) Nếu với số tiền trên chị gửi tiết kiệm theo mức kì hạn 6 tháng với lãi suất 0,65% một tháng thì 5 năm chị An nhận được số tiền là bao nhiêu (cả vốn và lãi) ở ngân hàng, biết rằng chị không rút lãi ở tất cả các kì trước đó.



Ảnh minh họa: Nguồn internet

■ Phân tích bài toán

- Đề bài yêu cầu tìm tổng số tiền chị An rút được từ ngân hàng 1 thời gian gửi nhất định, lúc này ta sử dụng trực tiếp công thức $\boxed{P_n = P_0(1+r)^n \ (2)}$
- Trong công thức (2) ta phải xác định rõ: $P_0 = ..., r = ..., n = ...?$, từ đó thay vào công thức (2) tìm được P_n.

Hướng dẫn giải

a) Do mỗi kì hạn là 3 tháng nên 5 năm ta có $n = 20$ kì hạn.

- Lãi suất mỗi kì hạn là $r = 3 \times 0,62\% = 1,86\%$.
- Áp dụng công thức (2) sau 5 năm chị An nhận được số tiền là:

  $P_n = 500000000 \times (1 + 1,86\%)^{20} \approx 722.842.104$ đồng.

b) Do mỗi kì hạn là 6 tháng nên 5 năm ta có $n = 10$ kì hạn.

- Lãi suất mỗi kì hạn là $r = 6 \times 0,65\% = 3,9\%$.
- Số tiền nhận được là: $P_n = 500000000 \times (1 + 3,9\%)^{10} = 733036297,4$ đồng.

DẠNG 2: CHO BIẾT VỐN VÀ LÃI SUẤT, TỔNG SỐ TIỀN CÓ ĐƯỢC SAU N KỲ. TÌM N

Phương pháp

- *Xác định rõ các giá trị ban đầu: vốn P_0, lãi suất r trong mỗi kì, tổng số tiền có được sau n kì.*
- *Để tìm n, áp dụng công thức (2), ta có $P_n = P_0(1+r)^n \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{P_n}{P_0}$ (*)*

  Để tìm n từ đẳng thức (*) ta có nhiều cách thực hiện:

Cách 1: Ta coi (*) là một phương trình mũ, giải ra tìm n.

$$\left(1+r\right)^n = \frac{P_n}{P_0} \Leftrightarrow n = log_{1+r}\frac{P_n}{P_0}$$

Cách 2: Lấy logarit thập phân hai vế của đẳng thức (*), ta được

$$log\left(1+r\right)^n = log\frac{P_n}{P_0} \Leftrightarrow n.log\left(1+r\right) = log\frac{P_n}{P_0} \Leftrightarrow n = \frac{log\frac{P_n}{P_0}}{log\left(1+r\right)}$$

- *Qua các bài toán cụ thể, sẽ minh họa rõ hơn cho phương pháp trên.*

Bài toán 4: Doanh nghiệp B muốn thu được 280 triệu đồng bằng cách đầu tư ở hiện tại 170 triệu đồng, với lãi suất sinh lợi là 13% một năm theo thể thức lãi kép. Xác định thời gian đầu tư?

■ Phân tích bài toán

- Ta xác định giả thiết đề bài cho gì: Số tiền ban đầu $P_0 = 170.000.000$ đồng, theo hình thức lãi kép với lãi suất sinh lợi r = 13% một năm và giá trị đạt được vào cuối đợt đầu tư là 280.000.000 đồng.
- Để tìm thời gian đầu tư trong bao lâu, ta xuất phát từ công thức (2) (Các em coi lại phần phương pháp giải). Ở bài toán này ta dùng cách 2.

Hướng dẫn giải

- Ta có $P_n = 280.000.000$ đồng, $p_0 = 170.000.000$ đồng, $r = 13\%$ một năm
- Sau n năm đầu tư, doanh nghiệp B thu được tổng số tiền là: $P_n = P_0\left(1+r\right)^n, (*)$.
  Để tìm n từ công thức (*) các em sử dụng 2 cách (coi lại phần phương pháp giải)
  Trong lời giải này ta sử dụng cách 2, lấy logarit thập phân hai vế. Ta được

$$(*) \Leftrightarrow \left(1+r\right)^n = \frac{P_n}{P_0} \Leftrightarrow n log\left(1+r\right) = log\frac{P_n}{P_0} \Leftrightarrow n = \frac{log\frac{P_n}{P_0}}{log\left(1+r\right)}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{log\frac{280.000.000}{170.000.000}}{log\left(1+13\%\right)} \approx 4,08 \text{ năm} = 4 \text{ năm } 1 \text{tháng}.$$

- Vậy phải đầu tư số vốn trong thời gian 4 năm 1 tháng để đạt được giá trị mong muốn.

Bài toán 5: Một người gửi 60 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm. Hỏi sau bao nhiêu năm gửi người gửi sẽ có ít nhất 120 triệu đồng từ số tiền gửi ban đầu (giả sử lãi suất không thay đổi)?

■ Phân tích bài toán

- Ta xác định giả thiết đề bài cho gì: Số tiền ban đầu $P_0 = 60.000.000$ đồng, theo hình thức lãi kép với lãi suất r = 7,56% một năm và giá trị đạt được sau n năm gửi là 280.000.000 đồng.
- Để tìm thời gian gửi trong bao lâu, ta xuất phát từ công thức (2) (Các em coi lại phần phương pháp giải). Ở bài toán này ta dùng cách 1.

Hướng dẫn giải

- Ta có $P_n = 120.000.000$ đồng, $P_0 = 60.000.000$ đồng, $r = 7,56\%$ một năm

- Áp dụng công thức (2): sau n năm gửi, người gửi thu được tổng số tiền là

$$P_n = P_0(1+r)^n \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{P_n}{P_0} \Leftrightarrow n = log_{1+r}\frac{P_n}{P_0} \Leftrightarrow n = log_{1+7,56\%}\frac{120.000.000}{60.000.000} \approx 9,51 \text{năm}$$

- Vậy sau khoảng 10 năm người gửi sẽ có ít nhất 120 triệu đồng từ số vốn 60 triệu đồng ban đầu.

Bài toán 6: Một khách hàng có 100.000.000 đồng gửi ngân hàng kì hạn 3 tháng với lãi suất 0,65% một tháng theo thể thức lãi kép. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu quý gửi tiền vào ngân hàng, khách mới có số tiền lãi lớn hơn số tiền gốc ban đầu gửi ngân hàng, giả sử người đó không rút lãi trong tất cả các quý định kì. (Số quý gửi là số nguyên)

■ Phân tích bài toán

- Ta xác định giả thiết đề bài cho gì: Số tiền ban đầu $P_0 = 100.000.000$ đồng, gửi theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,65% một tháng và kì hạn gửi là 3 tháng, từ đó suy ra được lãi suất trong 1 kì hạn là: $r = 3 \times 0,65\% = 1,95\%$
- Để tìm thời gian n gửi tối thiểu trong bao lâu, để số tiền lãi lớn hơn số tiền gốc ban đầu ta làm như sau: Ta tìm tổng số tiền lãi $P_n - P_0$ có được sau n quý. Từ đó ta giải bất phương trình $P_n - P_0 > P_0$ suy ra n vần tìm. Các em coi lời giải chi tiết ở dưới.

Hướng dẫn giải

- Áp dụng công thức (2) ta có: $P_0 = 100.000.000$ đồng, lãi suất trong 1 kì hạn là: $r = 3 \times 0,65\% = 1,95\%$. Sau n quý tổng số tiền (vốn và lãi)khách hàng có được là: $P_n = P_0(1+r)^n$ suy ra tổng số tiền lãi có được sau n quý là: $P_n - P_0$
- Cần tìm n để $P_n - P_0 > P_0 \Leftrightarrow P_0(1+r)^n - P_0 > P_0 \Leftrightarrow (1+r)^n > 2$

$\Leftrightarrow n > log_{1+r} 2 \Leftrightarrow n > log_{1+1,95\%} 2 \approx 35,89 \geq 36$

- Vậy sau 36 quý (tức là 9 năm) người đó sẽ có số tiền lãi lớn hơn số tiền gốc ban đầu gửi ngân hàng.

DẠNG 3: CHO BIẾT VỐN, TỔNG SỐ TIỀN CÓ ĐƯỢC SAU N KỲ. TÌM LÃI SUẤT

Phương pháp

- *Xác định rõ các giá trị ban đầu: vốn P_0, tổng số tiền có được sau n kì, số kỳ n.*
- *Để tính lãi suất r mỗi kì. Từ công thức (2) ta có:*

$$P_n = P_0(1+r)^n \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{P_n}{P_0} \Leftrightarrow 1+r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} - 1$$

- *Qua các bài toán cụ thể dưới đây, sẽ minh họa rõ hơn cho phương pháp trên*

Bài toán 7: Doanh nghiệp C gửi tiền vào ngân hàng với số tiền là 720 triệu đồng, theo thể thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất r% một năm. Sau 5 năm doanh nghiệp C có một số tiền 1200 triệu đồng. Xác định r? (Biết lãi suất hàng năm không thay đổi)

■ **Phân tích bài toán**

- Ta xác định giả thiết đề bài cho gì: Số tiền ban đầu $P_0 = 720.000.000$ đồng, tổng số tiền có được sau 5 năm ($n = 5$ kì hạn) là $1200.000.000$ đồng.
- Đề bài yêu cầu tìm lãi suất mỗi kì, ta áp dụng công thức $r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} - 1$ (Coi phần phương pháp giải)

Hướng dẫn giải

- Lãi suất mỗi kì là: $r = \sqrt[5]{\frac{P_n}{P_0}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{120.000.0000}{720.000.000}} - 1 \approx 10,76\%$ một năm.
- Vậy lãi suất tiền gửi là $10,76\%$ một năm để đạt được giá trị mong muốn.

DẠNG 4: CHO BIẾT LÃI SUẤT, TỔNG SỐ TIỀN CÓ ĐƯỢC SAU N KỲ. TÌM VỐN BAN ĐẦU

Phương pháp

- *Xác định rõ các giá trị ban đầu: tổng số tiền có được saun kì, lãi suất r, số kỳ n.*
- *Tính số vốn ban đầu: Áp dụng công thức* $P_n = P_0(1+r)^n \Leftrightarrow P_0 = \frac{P_n}{(1+r)^n}$
- *Qua các bài toán cụ thể dưới đây, sẽ minh họa rõ hơn cho phương pháp trên.*

Bài toán 8: Chủ cửa hàng C vay ngân hàng một số vốn, theo thể thức lãi kép, lãi gộp vốn 6 tháng 1 lần với lãi suất 9,6% một năm. Tổng số tiền chủ cửa hàng phải trả sau 4 năm 3 tháng là 536.258.000 đồng. Xác định số vốn chủ cửa hàng C đã vay. (Biết lãi suất hàng năm không thay đổi)

■ **Phân tích bài toán**

- Ta xác định giả thiết đề bài cho gì: Số tiền phải trả sau 4 năm 3 tháng là $P_n = 536.258.000$ đồng, hình thức đầu tư theo lãi kép, lãi gộp vốn 6 tháng 1 lần với lãi suất $9,6\%$ một năm, từ đó suy ra lãi suất trong 1 kì là: $r = \frac{1}{2} \times 9,6\% = 4,8\%$ và đầu tư trong thời gian 4 năm 3 tháng, từ đó suy ra số kì vay là: $n = 8,5$
- Số vốn chủ cửa hàng vay ban đầu là: $P_0 = \frac{P_n}{(1+r)^n}$

Hướng dẫn giải

- Ta có $n = 8,5$, $r = 4,8\%, P_n = 536.258.000$
- Số vốn chủ cửa hàng vay ban đầu là: $P_0 = \frac{P_n}{(1+r)^n} \Leftrightarrow P_0 = \frac{536.258.000}{(1+4,8\%)^{8,5}} \approx 360.000.000$ đồng.

■ **Bình luận:** ***Qua các bài toán các em biết được.***

Một là, hình thức lãi kép là gì, từ đó có những kiến thức và hiểu biết nhất định để sau này áp dụng trong cuộc sống hàng ngày.

Hai là, biết tính toán qua lại các yếu tố trong công thức liên quan bài toán lãi kép.

Để hiểu rõ hơn các vấn đề nêu ở trên, các em làm các bài tập trắc nghiệm ở dưới nhé.

CHỦ ĐỀ 3: BÀI TOÁN VAY TRẢ GÓP – GÓP VỐN

A. TÓM TẮT MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Ông Ninh hàng tháng gửi vào ngân hàng Y một số tiền như nhau là a đồng(*vào đầu mỗi kì hạn*), kì hạn1 tháng với lãi suất $r\%$ một tháng. Sau n tháng ông Ninh nhận được số tiền vốn và lãi là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

- **Cuối tháng thứ 1,** ông Ninh có số tiền là: $P_1 = a + a.r = a(1+r)$
- **Đầu tháng thứ 2,** ông Ninh có số tiền là:

  $P_1 + a = a(1+r) + a = a + a(1+r) = a\left[1 + (1+r)\right]$
- **Cuối tháng thứ 2,** ông Ninh có số tiền là:

  $P_2 = P_1 + P_1.r = a + a(1+r) + \left[a + a(1+r)\right].r = a\left[(1+r)^2 + (1+r)\right]$
- **Đầu tháng thứ 3,** ông Ninh có số tiền là:

  $P_2 + a = a\left[(1+r) + (1+r)^2\right] + a = a\left[1 + (1+r) + (1+r)^2\right]$
- **Cuối tháng thứ 3,** ông Ninh có số tiền là:

  $P_3 = P_2 + P_2.r = a\left[1 + (1+r) + (1+r)^2\right] + a\left[1 + (1+r) + (1+r)^2\right].r = a\left[(1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r)\right]$

…………………

- **Cuối tháng thứ n,** ông Ninh có số tiền là:

$$P_n = a\left[\underbrace{(1+r)^n + (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + ... + (1+r)^2 + (1+r)}_{S_n}\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P_n = a(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}} (3)$$

(Lưu ý các số hạng của tổng S_n *là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân với công bội là* $q = 1 + r$ *và số hạng đầu là* $u_1 = 1 + r$ *nên ta có* $S_n = u_1\frac{q^n - 1}{q - 1} = (1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}$ *)*

Để hiểu ý tưởng bài toán 1, các em theo dõi các ví dụ phía dưới nhé.

Ví dụ 1: Một người hàng tháng gửi vào ngân hàng 3.000.000 đồng, theo hình thức lãi kép, kì hạn1 tháng. Biết rằng lãi suất hàng tháng là 0,67%. Hỏi sau 2 năm người đó nhận được số tiền là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

- Áp dụng **công thức (3)** cho $a = 3.000.000$ đồng, $r = 0,67\%, n = 2 \times 12 = 24$ tháng
- Ta có: Sau 2 năm người đó nhận được số tiền là:

$$P_{24} = 3.000.000(1 + 0,67\%)\frac{(1 + 0,67\%)^{24} - 1}{0,67\%} = 78.351.483,45 \text{ đồng}$$

Ví dụ 2: Muốn có số tiền là 200 triệu đồng sau 36 tháng thì phải gửi tiết kiệm một tháng là bao nhiêu. Biết rằng tiền gửi tiết kiệm ngân hàng theo thể thức lãi kép, kì hạn 1 tháng với lãi suất 0,67% một tháng. Lãi suất không thay đổi trong thời gian gửi.

Hướng dẫn giải

- Áp dụng **công thức (3)** cho $P_n = 200.000.000$ đồng, $r = 0,67\%, n = 36$ tháng
- Ta có: $P_n = a(1+r)\dfrac{(1+r)^n - 1}{r} \Leftrightarrow a = \dfrac{r.P_n}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}$

$$\Leftrightarrow a = \frac{0,67\%.200.000.000}{(1+0,67\%)\left[(1+0,67\%)^{36} - 1\right]} \Leftrightarrow a \approx 4.898.146$$

Vậy hàng tháng phải gửi tiết kiệm số tiền gần 4.900.000 đồng.

Bài toán 2: Giả sử có một người gửi vào ngân hàng a đồng, lãi suất r% một tháng , kì hạn 1 tháng. Mỗi tháng người đó rút ra x đồng vào ngày ngân hàng tính lãi. Hỏi sau n tháng số tiền còn lại là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

- Gọi P_n là số tiền còn lại *sau tháng thứ n.*
- *Sau tháng thứ nhất* số tiền gốc và lãi là: $a + ar = a(1+r) = ad$ với $d = 1+r$

  Rút x đồng thì số tiền còn lại là: $P_1 = ad - x = ad - x\dfrac{d-1}{d-1}$
- *Sau tháng thứ hai* số tiền gốc và lãi là: $ad - x + (ad-x)r = (ad-x)(1+r) = (ad-x)d$

  Rút x đồng thì số tiền còn lại là:

  $P_2 = (ad-x)d - x = ad^2 - xd - x = ad^2 - x(d+1) = ad^2 - x\dfrac{d^2-1}{d-1}$
- *Sau tháng thứ ba* số tiền gốc và lãi là:

  $ad^2 - x(d+1) + \left[ad^2 - x(d+1)\right]r = \left[ad^2 - x(d+1)\right](1+r) = \left[ad^2 - x(d+1)\right]d$

  Rút x đồng thì số tiền còn lại là:

  $P_3 = \left[ad^2 - x(d+1)\right]d - x = ad^3 - xd^2 - xd - x = ad^3 - x(d^2+d+1) = ad^3 - x\dfrac{d^3-1}{d-1}$

  ....
- *Sau tháng thứ n* số tiền còn lại là:

  $P_n = ad^n - x\dfrac{d^n-1}{d-1} \Leftrightarrow P_n = a(1+r)^n - x\dfrac{(1+r)^n-1}{r}, (4)$ với $d = 1+r$

Để hiểu rõ bài toán trên các em theo rõi các ví dụ phía dưới

Ví dụ 1: Một cụ già có 100.000.000 gửi vào ngân hàng theo hình thức lãi kép, kì hạn 1 tháng với lãi suất 0,65% một tháng. Mỗi tháng cụ rút ra 1.000.000 đồng vào ngày ngân hàng tính lãi. Hỏi sau hai năm số tiền còn lại của cụ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

- Áp dụng **công thức (4)** với: $n = 24, r = 0,65\%, x = 1.000.000, a = 100.000.000$
- Vậy số tiền bà cụ còn lại sau 2 năm là:

$$P_{24} = 100.000.000(1+0,65\%)^{24} - 1.000.000.\frac{(1+0,65\%)^{24} - 1}{0,65\%} = 90.941.121,63 \text{ đồng.}$$

Ví dụ 2: Bạn An được gia đình cho gửi tiết kiệm vào ngân hàng với số tiền là 200.000.000 đồng, theo hình thức lãi kép, kì hạn 1 tháng với lãi suất 0,75 % một tháng. Nếu mỗi tháng An rút một số tiền như nhau vào ngày ngân hàng tính lãi thì An phải rút bao nhiêu tiền một tháng để sau đúng 5 năm, số tiền An đã gửi vừa hết?

Hướng dẫn giải

- Áp dụng **công thức (4)** với: $n = 60, r = 0,75\%, a = 200.000.000, P_n = P_{60} = 0$. Tìm x?
- Ta có $P_{60} = ad^{60} - x\dfrac{d^{60}-1}{d-1} \Leftrightarrow x\dfrac{d^{60}-1}{d-1} = ad^{60} - P_{60} \Leftrightarrow x = \dfrac{\left(ad^{60} - P_{60}\right)(d-1)}{d^{60}-1}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\left[200.000.000 \times (1+0,75\%)^{60} - 0\right] \times 0,75\%}{(1+0,75\%)^{60} - 1} \approx 4.151.671 \text{ đồng.}$$

Bài toán 3: Trả góp ngân hàng hoặc mua đồ trả góp.

(Bài toán này cách xây dựng giống bài toán số 2)

Ta xét bài toán tổng quát sau: Một người vay số tiền là a đồng, kì hạn 1 tháng với lãi suất cho số tiền chưa trả là r% một tháng *(hình thức này gọi là tính lãi trên dư nợ giảm dần nghĩa là tính lãi trên số tiền mà người vay còn nợ ở thời điểm hiện tại)* ,số tháng vay là n tháng, sau đúng một tháng kể từ ngày vay, người này bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau ,số tiền đều đặn trả vào ngân hàng là x đồng. Tìm công thức tính x ?Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian vay.



Ảnh minh họa: Nguồn internet

Hướng dẫn giải

- Gọi P_n là số tiền còn lại sau tháng thứ n.
- ***Sau tháng thứ nhất*** số tiền gốc và lãi là: $a + ar = a(1+r) = ad$ với $d = 1 + r$

  Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ nhất*** là: $P_1 = ad - x = ad - x\dfrac{d-1}{d-1}$
- ***Sau tháng thứ hai*** số tiền gốc và lãi là: $ad - x + (ad - x)r = (ad - x)(1+r) = (ad - x)d$

  Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ*** 2 là:

  $P_2 = (ad - x)d - x = ad^2 - xd - x = ad^2 - x(d+1) = ad^2 - x\dfrac{d^2-1}{d-1}$
- ***Sau tháng thứ ba*** số tiền gốc và lãi là:

  $ad^2 - x(d+1) + \left[ad^2 - x(d+1)\right]r = \left[ad^2 - x(d+1)\right](1+r) = \left[ad^2 - x(d+1)\right]d$

  Trả x đồng thì số tiền còn lại ***sau tháng thứ*** 3 là:

  $P_3 = \left[ad^2 - x(d+1)\right]d - x = ad^3 - xd^2 - xd - x = ad^3 - x(d^2 + d + 1) = ad^3 - x\dfrac{d^3-1}{d-1}$
- ....

- Số tiền còn lại *sau tháng thứ n* là: $P_n = ad^n - x\dfrac{d^n - 1}{d-1} \Leftrightarrow P_n = a(1+r)^n - x\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$ (5a)

  với $d = 1+r$

- Do sau tháng thứ n người vay tiền đã trả hết số tiền đã vay ta có

$$P_n = 0 \Leftrightarrow ad^n - x\frac{d^n - 1}{d-1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{ad^n(d-1)}{d^n - 1} \Leftrightarrow x = \frac{a(1+r)^n.r}{(1+r)^n - 1} \quad (5b)$$

Để hiểu bài toán vay trả góp, các em theo dõi các ví dụ phía dưới

Ví dụ 1: Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, lãi suất cho số tiền chưa trả là12%/năm. Ông muốn hòan nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hòan nợ, hai lần hòan nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hòan nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền x mà ông A phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hòan nợ là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hòan nợ.

(Trích đề minh họa môn Toán năm 2017)

Hướng dẫn giải

- Lãi suất 12% một năm suy ra lãi suất trong 1 tháng là 1% một tháng.
- Áp dụng **công thức (5b)** cho: $a = 100.000.000, r =,1\%, n = 3, P_3 = 0$. Tìm x?
- Vậy số tiền x mà ông A phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hòan nợ,để 3 tháng hết nợ là: $x = \dfrac{a.r.(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \dfrac{100.0,01.(1+0,01)^3}{(1+0,01)^3 - 1} \approx 34$ triệu đồng một tháng.

Ví dụ 2: Một người vay ngân hàng với số tiền 50.000.000 đồng, mỗi tháng trả góp số tiền 4.000.000 đồng và phải trả lãi suất cho số tiền chưa trả là 1,1% một tháng theo hình thức lãi kép. Hỏi sau bao lâu người đó trả hết nợ?

Hướng dẫn giải

- Áp dụng **công thức (5b)** cho: $a = 50.000.000, x = 4.000.000, r = 1,1\%, P_n = 0$. Tìm n?
- Từ **công thức (5b)** ta có: $x = \dfrac{ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \Leftrightarrow x(1+r)^n - x = ar(1+r)^n$

$\Leftrightarrow (x - ar)(1+r)^n = x \Leftrightarrow (1+r)^n = \dfrac{x}{x - ar}$ [illegible]

$\Leftrightarrow n = \log$ [illegible] $\dfrac{4.000.000}{4.000.000 - 50.000.000 \times 1,1\%}$ [illegible] $\Leftrightarrow n \approx 13,52$

Ở đây ta thấy n không là số nguyên, lúc này ta có hai cách làm chọn

- Nếu chọn $n = 13$ **(chọn số nguyên cao hơn gần nhất)**

  Số tiền người này còn nợ sau tháng thứ 12 là:

  $P_{12} = 50.(1+1,1\%)^{12} - 4.\dfrac{(1+1,1\%)^{12} - 1}{1,1\%} = 6,001147461$ triệu đồng

  (Lưu A máy tính casio)

  Số tiền người này phải trả tháng cuối là: $A(1+0,5\%) \approx 6,067$ triệu đồng.

- Nếu chọn $n = 14$ **(chọn số nguyên nhỏ hơn gần nhất)**

  Số tiền người này còn nợ sau tháng thứ 13 là:

  $P_{13} = 50.(1+1,1\%)^{13} - 4.\dfrac{(1+1,1\%)^{13}-1}{1,1\%} = 2,067160083$ triệu đồng. (Lưu B máy tính casio)

  Số tiền người này phải trả tháng cuối là: $B(1+0,5\%) \approx 2,09$ triệu đồng.

Bình luận:

Nếu chọn theo $n = 13$ thì tháng cuối trả nhiều hơn 4 triệu đồng

Nếu chọn $n = 14$ thì tháng cuối trả ít hơn 4 triệu đồng.

TỔNG KẾT CHỦ ĐỀ 1

Bài toán 1: Ta đưa vào sử dụng vốn gốc ban đầu P_0 với mong muốn đạt được lãi suất r mỗi kì theo hình thức **lãi đơn** trong thời gian n kì. Vào cuối mỗi kì ta rút tiền lãi và chỉ để lại vốn. Tính tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) sau n kì.

Kết quả cần nhớ:

$P_n = P_0(1+nr)$, (1) [redacted]

TỔNG KẾT CHỦ ĐỀ 2

Bài toán 2: Ta đưa vào sử dụng vốn gốc ban đầu P_0 với mong muốn đạt được lãi suất r mỗi kì theo hình thức **lãi kép** trong thời gian n kì. Vào cuối mỗi kì ta rút tiền lãi và chỉ để lại vốn. Tính P_n tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) sau n kì.

Kết quả cần nhớ:

- Sau n kì, tổng giá trị đạt được là $\boxed{P_n = P_0(1+r)^n, (2)}$

  Trong đó P_n là ***tổng giá trị đạt được (vốn và lãi)*** sau n kì.

  P_0 là vốn gốc.

  r là lãi suất mỗi kì.

- Ta cũng tính được ***số tiền lãi*** thu được sau n kì là: $\boxed{P_n - P_0}$

TỔNG KẾT CHỦ ĐỀ 3

Bài toán 1: Ông Ninh hàng tháng gửi vào ngân hàng Y một số tiền như nhau là a đồng,kì hạn 1 tháng với lãi suất $r\%$ một tháng. Sau n tháng ông Ninh nhận được số tiền vốn và lãi là bao nhiêu?

Kết quả cần nhớ: Sau n tháng ông Ninh nhận được số tiền vốn và lãi là

$$\boxed{P_n = a(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}} (3)$$

Bài toán 2: Giả sử có một người gửi vào ngân hàng a đồng, lãi suất r% một tháng, kì hạn 1 tháng. Mỗi tháng người đó rút ra x đồng vào ngày ngân hàng tính lãi. Hỏi sau n tháng số tiền còn lại là bao nhiêu?

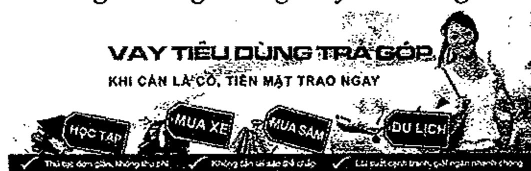
Kết quả cần nhớ:

Sau n tháng số tiền còn lại là: $P_n = ad^n - x\dfrac{d^n - 1}{d-1} \Leftrightarrow P_n = a(1+r)^n - x\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$, (4)

Bài toán 3: Trả góp ngân hàng hoặc mua đồ trả góp.

(Bài toán này cách xây dựng giống bài toán số 2)

Ta xét bài toán tổng quát sau: Một người vay số tiền là a đồng, kì hạn 1 tháng với lãi suất cho số tiền chưa trả là r% một tháng *(hình thức này gọi là tính lãi trên dư nợ giảm dần nghĩa là tính lãi trên số tiền mà người vay còn nợ ở thời điểm hiện tại)*, số tháng vay là n tháng, số tiền đều đặn trả vào ngân hàng là x đồng. Tìm công thức tính x? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian vay.



Ảnh minh họa: Nguồn internet

Kết quả cần nhớ:

- Số tiền còn lại ***sau tháng thứ n*** là:

$$P_n = ad^n - x\frac{d^n - 1}{d-1} \Leftrightarrow P_n = a(1+r)^n - x\frac{(1+r)^n - 1}{r} (5a) \text{ với } d = 1 + r$$

- Số tiền đều đặn trả vào ngân hàng là $x = \dfrac{a(1+r)^n . r}{(1+r)^n - 1}$ (5b)

CHỦ ĐỀ 4: BÀI TOÁN LÃI KÉP LIÊN TỤC – CÔNG THỨC TĂNG TRƯỞNG MŨ - ỨNG DỤNG TRONG LĨNH VỰC ĐỜI SỐNG XÃ HỘI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bài toán lãi kép liên tục.

Ta đã biết: nếu đem gửi ngân hàng một số vốn ban đầu là P_0 với lãi suất mỗi năm là r theo thể thức lãi kép thì sau n năm gửi số tiền thu về cả vốn lẫn lãi sẽ là $P_0(1+r)^n$

Giả sử ta chia mỗi năm thành m kì để tính lãi và giữ nguyên lãi suất mỗi năm là r thì lãi suất mỗi kì là $\dfrac{r}{m}$ và số tiền thu được n năm là (hay sau nm kì) là $P_0\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{m.n}$

Hiển nhiên khi tăng số kì m trong một năm thì số tiền thu được sau n năm cũng tăng theo. Tuy nhiên như ta thấy sau đây, nó không thể tăng lên vô cực được.

Thể thức tính lãi khi $m \to +\infty$ gọi là thể thức lãi kép liên tục.

Như vậy với số vốn ban đầu là P_0 với lãi suất mỗi năm là r theo thể thức lãi kép liên tục thì ta chứng minh được rằng sau n năm gửi số tiền thu về cả vốn lẫn lãi sẽ là:

$$\boxed{P_n = P_0 e^{nr}} \qquad (6)$$

Công thức trên được gọi là công thức ***lãi kép liên tục.***

Ví dụ 1: Với số vốn 100 triệu đồng gửi vào ngân hàng theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất 8% năm thì sau 2 năm số tiền thu về cả vốn lẫn lãi sẽ là: $S = 100.e^{2\times 8\%} \approx 117,351087$ *triệu đồng.*

Nhiều bài toán, hiện tượng tăng trưởng (hoặc suy giảm) của tự nhiên và xã hội, chẳng hạn sự tăng trưởng dân số, cũng được tính theo công thức (6). Vì vậy công thức (6) còn được gọi là *công thức tăng trưởng(suy giảm) mũ.*

Để hiểu rõ hơn về *công thức tăng trưởng(suy giảm) mũ.* Các em qua phần tiếp theo của tài liệu.

2. Bài toán về dân số.

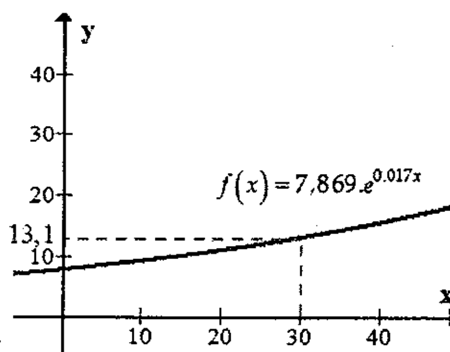
- Gọi:


[redacted]

- Khi đó sự tăng dân số được ước tính bằng 1 trong 2 công thức sau
  - **Công thức 1:** $\boxed{P_n = P_0 e^{nr}}$ *dùng công thức tăng trưởng(suy giảm) mũ.*
  - **Công thức 2:** $\boxed{P_n = P_0 (1+r)^n}$ *dùng công thức tính lãi kép.*

- Ta xét một ví dụ sau: Năm 2001, dân số nước ta khoảng 78690000 người. Theo công thức tăng trưởng mũ, nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm luôn là $1,7\%$ thì ước tính dân số Việt Nam x năm sau sẽ là $78690000.e^{0.017x} = 7,869.e^{0.017x}$ (chục triệu người). Để phần nào thấy được mức độ tăng nhanh của dân số, ta xét hàm số $f(x) = 7,869.e^{0.017x}$

- Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cho thấy khoảng 30 năm sau (tức là khoảng năm 2031), dân số nước ta sẽ vào khoảng 131 triệu người, tức là tăng gấp rưỡi. Chính vì vậy, các em hiểu bùng nổ dân số là khái niệm dùng rất phổ biến hiện nay, để thể hiện việc dân số tăng quá nhanh, có cơ cấu dân số trẻ, thời gian tăng gấp đôi rút ngắn. Những vấn đề đặt ra cho các nhà hoạch định chính sách như kế hoạch hóa dân số, việc làm, phân bố dân cư, nhập cư, di dân.... sao cho hợp lí.



B. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

Ví dụ 1: Dân số nước ta năm 2014 đạt 90,7 triệu người (*theo Thông cáo báo chí của ASEANstats*), tỉ lệ tăng dân số là 1,06%.

a) Dự đoán dân số nước ta năm 2024 là bao nhiêu?

b) Biết rằng dân số nước ta sau *m* năm sẽ vượt 120 triệu người. Tìm số *m* bé nhất?

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết ta có các dữ kiện sau: $P_0 = 90.700.000, n = 2024 - 2014 = 10, r = 1,06\%$

- Áp dụng công thức (1): Khi đó dự đoán dân số nước ta năm 2024 là:

  $P_{10} = 90.700.000 \times e^{10\times 1,06\%} \approx 100.842.244$ (người)

- Áp dụng công thức (2): Khi đó dự đoán dân số nước ta năm 2024 là:

  $P_{10} = 90700000 \times (1+1,06\%)^{10} \approx 100.786.003$ (người)

b) **Áp dụng công thức (2)** ta có:

$$120.000.000 < 90.700.000(1+1,06\%)^m \Leftrightarrow 1,0106^m > \frac{1.200}{907}$$

$$\Leftrightarrow m > \log_{1,0106}\frac{1.200}{907} \Rightarrow m \ge 27$$

- Vậy *m* bé nhất bằng 27. (*Tức là sau ít nhất 27 năm (từ năm 2041) dân số nước ta sẽ vượt mốc 120 triệu người*).

  Áp dụng công thức (1):

$$120.000.000 < 90.700.000 \times e^{m\times 1,06\%} \Leftrightarrow e^{0,0106m} > \frac{1.200}{907} \Leftrightarrow 0,0106m < ln\frac{1.200}{907} \Rightarrow m \ge 27$$

- Vậy *m* bé nhất bằng 27(*Tức là sau ít nhất 27 năm (từ năm 2041) dân sốnước ta sẽ vượt mốc 120 triệu người*).

■ **Bình luận:** ***Qua bài toán này ta cần lưu ý:***

Một là, *việc áp dụng công thức (1) hay công thức (2), tùy thuộc vào từng bài toán. Công thức (1) thường dùng trong các bài toán có tính dự báo dân số trong 1 thời gian dài. Công thức (2) dùng trong việc tính toán dân số trong các khoảng thời gian nhất định.*

Hai là, *trong các bài toán có thể đề bài nói rõ các em dùng công thức nào. Nếu đề bài không nói rõ thì khi đó ta sử dụng công thức nào cũng được vì sai số trong tính toán đối với hai công thức là không lớn*

Ví dụ 2: Sự tăng dân số được ước tính theo công thức $P_n = P_0 e^{n.r}$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy làm mốc tính, P_n là dân số sau *n*năm, *r*là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 triệu và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 100 triệu người?

Hướng dẫn giải

Phân tích:

Từ giả thiết ta có các dữ kiện sau: $P_0 = 90.700.000, P_n = 100.000.000, r = 1,7\%$. Tìm n?

- Áp dụng công thức $P_n = P_0 e^{n.r} \Leftrightarrow 100.000.000 = 78.685.800.e^{1,7\%n} \Leftrightarrow 100 = 78,6858.e^{1,7\%n}$ (*)

- Lấy logarit tự nhiên hai vế của (*) ta được

$ln100 = ln\left(78,6858.e^{1,7\%n}\right) \Leftrightarrow ln100 = ln78,6858 + 1,7\%n$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{ln100 - ln78,6858}{1,7\%} \approx 14$

Vậy nếu cứ tăng dân số với tỉ lệ hàng năm là $r = 1,7\%$ thì đến năm 2015 dân số nước ta sẽ ở mức 100 triệu người.

■ **Bình luận:** ***Qua bài toán này ta cần lưu ý:***

Một là, *trong bài toán này đề bài cho biết là ta phải sử dụng công thức (1).*

Hai là, *trong giải phương trình (*) các em áp dụng trực tiếp cách giải phương trình mũ cơ bản sau cũng được:* $e^u = b \Leftrightarrow u = lnb$ *với* $b > 0$.

Ví dụ 3: Sự tăng dân số được ước tính theo công thức $P_n = P_0(1+r)^n$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy làm mốc tính, P_n là dân số sau nnăm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm của thế giới là không đổi trong giai đoạn 1990 – 2001. Biết rằng năm 1990 dân số thế giới là 5,30 tỉ người, năm 2000 dân số thế giới là 6,12 tỉ người. Tính dân số thế giới vào năm 2011? (Kết quả là tròn đến hai chữ số)

Hướng dẫn giải

Phân tích: Từ giả thiết ta có các dữ kiện sau: $P_0 = 5,30, P_{10} = 6,12$, Tính $r = ?\ P_{21} = ?$

- Áp dụng công thức $P_n = P_0(1+r)^n$, ta được
- $P_{10} = P_0(1+r)^{10} \Leftrightarrow 6,12 = 5,30(1+r)^{10} \Leftrightarrow 1 + r = \sqrt[10]{\dfrac{6,12}{5,30}} \Leftrightarrow r = 1,45\%$
- Dân số thế giới vào năm 2011 là: $P_{21} = P_0(1+r)^{21} = 5,30(1+1,45\%)^{21} = 7,17$ tỉ người.

■ **Bình luận:** ***Qua bài toán này ta cần lưu ý:***

Một là, trong bài toán này đề bài cho biết là ta phải sử dụng công thức (1).

Hai là, trong giải phương trình (*) các em áp dụng trực tiếp cách giải phương trình mũ cơ bản sau cũng được: $e^u = b \Leftrightarrow u = lnb$ *với* $b > 0$.

CHỦ ĐỀ 5: ỨNG DỤNG TRONG LĨNH VỰC KHOA HỌC KỸ THUẬT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bài toán về sự phóng xạ của các chất.

Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức : $m(t) = m_o\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ trong đó $m_0$là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác).



Ảnh minh họa: Nguồn internet

2. Động đất

2.1. Tìm hiểu sơ lược về động đất.

Trước khi tìm hiểu về một số ứng dụng của hàm mũ, hàm logarit trong các tính toán về động đất, các em tìm hiểu sơ qua về hiện tượng động đất.

Các cấp độ của động đất

Từ thế kỷ 19, người ta bắt đầu quy định cấp độ động đất để dễ hình dung mức độ nguy hiểm của động đất để thông báo cho dân chúng và đánh giá thiệt hại. Năm 1883 hai nhà địa chấn Rossi (Italia) và Forel (Thuỵ Sĩ đưa ra thang Rossi- Forel 10 cấp độ là thang đầu tiên mà thế giới sử dụng.

Năm 1902, nhà nghiên cứu núi lửa Italia là Juseppe Mercalli đề xuất thang Mercalli có 12 cấp độ tỉ mỉ hơn, rất được hoan nghênh. Thang này được các nhà địa chấn chính lý nhiều lần và phổ biến trên thế giới. Nước có động đất nhiều nhất thế giới là Nhật cũng có một "thang địa chất của riêng mình gọi là thang Omori, đề xuất năm 1906, song dường như chỉ dùng ở nước họ.

Phổ biến nhất hiện nay và gần như ai cũng biết đến là cách phân loại cấp độ động đất theo thang Richter và MKS-64 (hoặc KMS-81).



Ảnh minh họa: Trận động đất 9,0 độ Richter ở Nhật Bản

Thang Richter dựa vào hàm logarit cơ số là 10 để xác định biên độ tối đa các rung chấn của Trái đất. Mỗi độ của thang Richter biểu thị sự tăng giảm biên độ rung chấn theo hệ số 10 và tăng giảm về năng lượng phát sinh theo hệ số 32.

Như vậy một trận động đất 5 độ Richter sẽ gây nên rung chấn mạnh gấp 10 lần và tỏa ra một năng lượng gấp 32 lần độ 4, và cứ thế mà tăng theo cấp số nhân với công bội là 10 và 32. Để dễ hình dung, có thể lấy ví dụ độ 1 Richter tương đương sức nổ của 1,5 kg thuốc nổ TNT thì của một trận động đất cấp độ Richter có sức phá hoại tương đương 6 triệu tấn thuốc nổ TNT.

Thang MKS chú trọng nhiều hơn tới năng lượng hủy diệt của động đất với sự tăng dần chứ không tới 32 lần như 1 độ Richter làm người ta dễ hình dung hơn. Thang MSK-64 gồm 12 cấp, được Hội đồng địa chấn Châu Âu thông qua năm 1964 và áp dụng cả ở Ấn Độ cụ thể như sau:

Cấp 1: Động đất không cảm thấy, chỉ có máy mới ghi nhận được.

Cấp 2: Động đất ít cảm thấy (rất nhẹ). Trong những trường hợp riêng lẻ, chỉ có người nào đang ở trạng thái yên tĩnh mới cảm thấy được.

Cấp 3: Động đất yếu. Ít người nhận biết được động đất. Chấn động y như tạo ra bởi một ô tô vận tải nhẹ chạy qua.

Cấp 4: Động đất nhận thấy rõ. Nhiều người nhận biết động đất, cửa kính có thể kêu lạch cạch.

Cấp 5: Thức tỉnh. Nhiều người ngủ bị tỉnh giấc, đồ vật treo đu đưa.

Cấp 6: Đa số người cảm thấy động đất, nhà cửa bị rung nhẹ, lớp vữa bị rạn.

Cấp 7: Hư hại nhà cửa. Đa số người sợ hãi, nhiều người khó đứng vững, nứt lớp vữa, tường bị rạn nứt.

Cấp 8: Phá họai nhà cửa; Tường nhà bị nứt lớn, mái hiên và ống khói bị rơi.

Cấp 9: Hư hại hòan toàn nhà cửa; nền đất có thể bị nứt rộng 10 cm.

Cấp 10: Phá họai hòan toàn nhà cửa. Nhiều nhà bị sụp đổ, nền đất có thể bị nứt rộng đến 1 mét.

Cấp 11: Động đất gây thảm họa. Nhà, cầu, đập nước và đường sắt bị hư hại nặng, mặt đất bị biến dạng, vết nứt rộng, sụp đổ lớn ở núi.

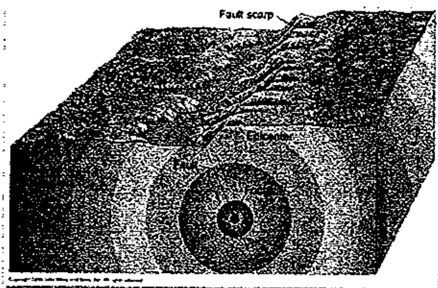
Cấp 12: Thay đổi địa hình. Phá hủy mọi công trình ở trên và dưới mặt đất, thay đổi địa hình trên diện tích lớn, thay đổi cả dòng sông, nhìn thấy mặt đất nổi sóng.

Nếu so sánh thang động đất giữa thang Richter và thang MSK-64 có thể tóm lược qua bảng sau:

Thang Richter	Thang MKS - 64
1.0 – 3.0	I
3,0 – 3,9	II - III
4,0 - 4,9	IV - V
5,0 – 5,9	VI - VII
6,0 – 6,8	VIII
6,9 – 7,6	IX
7,6 – 8,0	X
Trên 8,0	XI - XII

Địa chấn kế xưa và nay

Việc xác định mức độ của một trận động đất là cần thiết vì nó nói lên được sức mạnh của việc Trái đất cựa mình và lường được thiệt hại do động đất gây ra. Mức độ tàn phá của một cuộc động đất phụ thuộc vào nhiều yếu tố: chấn tâm,chấn tiêu, chấn cấp.



Anh minh họa: nguồn internet

Chấn tiêu là nơi phát sinh ra động đất, thường nằm sâu dưới mặt đất (có khi hàng trăm kilomet). Chấn tâm là hình chiếu của chấn tiêu trên mặt đất, không ít trường hợp là một khu công nghiệp đông dân, thậm chí thủ đô của một nước. Chấn cấp là cường độ va chạm gây chấn động và năng lượng một trận động đất phát sinh đo bằng một số thang cấp độ được thế giới dùng để thông báo cho dân chúng mỗi khi có động đất và dư chấn của nó gây ra ở những vùng xa tâm chấn. Các thiết bị để xác định mức độ động đất được gọi là địa chấn kế.

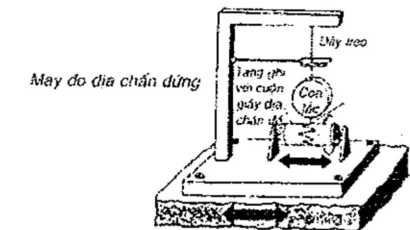
Từ thời Đông Hán bên Trung Quốc (thế kỷ 1-2 sau công nguyên, nhà thiên văn Trương Hành quan sát và ghi chép tỉ mỉ các hiện tượng của từng trận động đất, dùng phương pháp khoa học phân tích nguyên nhân xảy ra động đất. Trải qua nhiều lần thí nghiệmkiên trì, năm 132 sau công nguyên, Trương Hành chế tạo ra một chiếc máy đầu tiên có thể dự báo động đất của Trung Quốc nói riêng và thế giới nói chung, và đặt tên là "Địa động nghi".

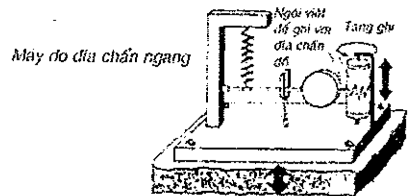
Chiếc "Địa động nghi" này được chế tạo bằng đồng đen, có hình dáng như một hũ rượu lớn hình tròn, đường kính gần một mét, giữa là có một cây cột đồng lớn có 8 cây cột đồng nhỏ ở xung quanh, bốn phía có 8 con rồng. Đầu 8 con rồng hơi ngẩng lên lần lượt nối liền với 8 cây cột đồng nhỏ, hướng về 8 phía là đông, nam, tây, bắc, đông bắc, đông nam, tây bắc và tây nam. Miệng rồng ngậm một viên bi đồng, dưới mỗi đầu rồng có một con cóc đồng há miệng, sẵn sàng đón lấy hòn bi từ miệng rồng nhả ra.

Khi động đất xảy ra ở phía nào thì cột đồng nhỏ của "Địa động nghi" sẽ nghiêng về phía đó, làm đầu rồng há miệng nhả ra hòn bi, rơi vào miệng cóc phát ra một tiếng "keng" báo cho mọi người biết phía đó đã xảy ra trận động đất, để kịp thời biết mà cứu giúp.

"Địa động nghi" của Trương Hành "đều dự báo đúng, chưa bao giờ sai". Một hôm vào tháng 2 năm 138 sau công nguyên, khi vua quan đang thiết triều, một tiếng keng vang lên: hòn bi đồng từ miệng rồng hướng về phía tây rơi vào miệng cóc, nhưng mọi người chưa cảm thấy động đất. Các quan vốn hoài nghi "Địa động nghi" bèn nói "Địa động nghi" dự báo không chuẩn xác, chỉ có thể biết động đất xảy ra ở khu vực xung quanh Lạc Dương.

Ba, bốn ngày sau, sứ giả từ phía tây Lạc Dương phóng ngựa hỏa tốc về Triều báo tin Cam Túc bị động đất. Lúc ấy, mọi người mới hoàn toàn tin rằng "Địa động nghi" của Trương Hành" là dụng cụ khoa học có tác dụng. Từ đó trở đi, Trung Quốc bắt đầu lịch sử dùng máy móc quan sát từ xa và ghi chép động đất. Tuy nhiên, địa chấn kế cổ của Trung Quốc chỉ mới xác định định tính mà chưa định lượng, chưa nói lên được cấp độ của một trận động đất.





Ảnh minh họa: Nguồn internet

Vài thế kỷ sau, người Ý cũng phát minh địa chấn kế dựa trên chuyển động của nước và sau này, của thủy ngân. Năm 1885, Luigi Palmieri (Ý) phát minh ra chiếc địa chấn kế gồm ống thủy tinh hình chữ U có nhánh đựng thủy ngân đầy ngang nhành đó. Kim loại lỏng này rất linh động nên nhạy cảm với các chấn động. Khi động đất xảy ra, một giọt thủy ngân lăn ra ngoài, khiến một dòng điện được nối lại, làm ngừng chiếc đồng hồ điện và ghi sự dao động của sóng địa chấn trên trống quay. Từ sơ đồ này, biết được thời gian và độ manh của trận động đất.

Còn ngày nay, địa chấn kế là các dụng cụ rất phức tạp, tinh vi kết hợp cơ học (con lắc) và điện tử học, có độ chính xác cao để đo độ rung của mặt đất ở mức độ rất nhẹ,

từ khoảng cách rất xa, vừa để dự báo, vừa ghi lại những rung chấn trong quá trình trận động đất xảy ra ở cấp độ nào. Có loại theo dõi sự chuyển dịch của thạch quyển, sự va chạm của các mảng kiến tạo nằm sâu dưới lòng đất để dự báo dài hạn khả năng động đất ở từng vùng. Địa chấn kế còn ghi lại cả những vụ thử hạt nhân ở các nước, xác định sức nổ của những vũ khí giết người hàng loạt đó. Ngoài ra còn có những loại chuyên dụng, dùng trong thăm dò địa chất quặng mỏ, dầu khí...

Các địa chấn kế hiện đại thuộc nhiều loại khác nhau đo được cả chuyển động theo chiều ngang và chiều dọc đặt tại các trạm quan trắc. Hiện có tới vài trăm trạm quan trắc như vậy trên khắp thế giới. Thông số do các trạm này thu thập thường xuyên được so sánh, đối chiếu. Từ các dữ liệu đó có thể tính được tâm động đất và năng lượng trận động đất gây ra.

Theo Song Hà(*Nguồn : http://vietnamnet.vn/vn/khoa-hoc/cac-cap-do-dong-dat-14267.html)*

Các trận động đất xảy ra trong lịch sử

Mỗi năm có hàng ngàn trận động đất xảy ra trên trái đất, tuy nhiên chỉ một ít trong số đó gây ra những thiệt hại nghiêm trọng.

Mỗi trận động đất được đo theo cường độ, theo các quy mô từ nhỏ đến lớn. Một trận động đất có cường độ 6,0 độ Richter và cao hơn được xếp là động đất mạnh và có thể gây ra những thiệt hại nghiêm trọng, giống như trận động đấtChristchurch ở New Zealand.

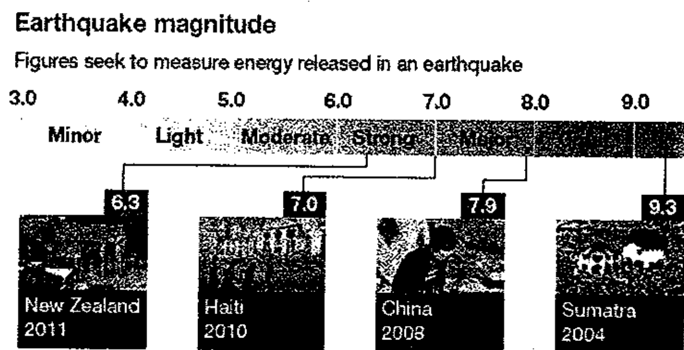
Trận động đất mạnh nhất được ghi lại trong những năm gần đây là trận động đất ở Sumatra vào năm 2004, với cường độ 9,3 độ Richter và gây ra sóng thần tàn phá châu Á.

Những con số trên nhằm đo lường cường độ một trận động đất cũng như năng lượng mà nó phát ra.

Những thông số dùng để phân chia và đo các trận động đất cũng rất khác nhau. Ví dụ, sự khác biệt về cường độ giữa một trận động đất mạnh 5 độ với trận động đất 6 độ là rất rõ rệt chứ không chỉ đơn thuần là như là sự khác biệt về một con số.

Trên thực tế, theo kết quả mà các nhà địa chấn học đo những thảm họa thiên nhiên này, một trận động đất mạnh 6 độ sẽ sở hữu năng lượng nhiều hơn 32 lần so với một trận động đất 5 độ Richter.

Điều đó có nghĩa là một khoảng cách từ 5 đến 7 độ có thể tương ứng với một trận động đất mạnh hơn gần 1.000 lần. Những trận động đất gây ra những phá hủy nghiêm trọng thường có cường độ 7,0 độ Richter và cao hơn.



(Hình minh họa: BBC)

Trận động đất năm 2004 gây ra sóng thần tại châu Á là trận động đất lớn thứ 3 kể từ năm 1900, với cường độ 9,3 độ Richter. Mỗi năm có khoảng 20 trận động đất lớn trên thế giới được ghi lại theo khảo sát của Cơ quan Theo dõi địa chấn của Mỹ.

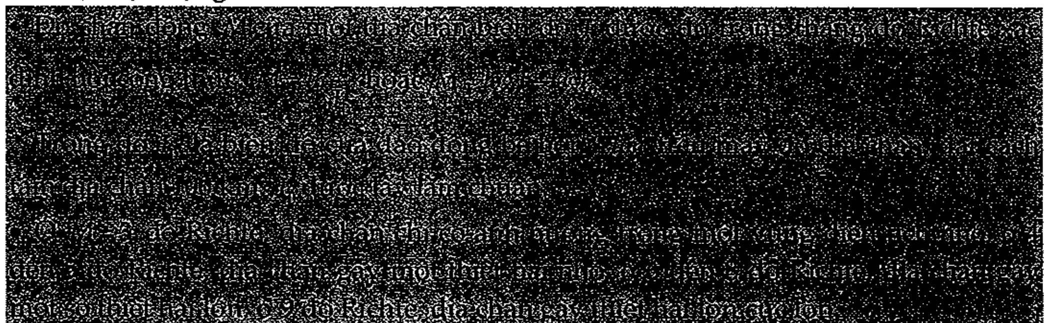
Trận động đất năm 2010 ở Haiti được đo lại với cường độ 7,0 độ Richter, và bởi tâm chấn rất gần với thủ đô Port-au-Price, nên gây ra thiệt hại rất nghiêm trọng, và khiến cho hơn 200.000 người chết.

Số người chết ở Haiti trái ngược với số người chết trong trận động đất mạnh 8,8 độ Richter ở Chile vào tháng 2/2010, khi chỉ có gần 1.000 người chết. Bởi Chile là đất nước đã từng diễn ra những trận động đất mạnh trong lịch sử.

Trận động đất lớn nhất được ghi lại tại đây diễn ra vào năm 1960, với cường độ 9,5 độ Richter, và gây ra sóng thần. Nhưng chỉ có khoảng 1.655 người đã chết - con số thương vong này là tương đối thấp, nhờ có những cảnh báo khiến mọi người chạy ra khỏi nhà của họ trước khi động đất diễn ra.

Nguồn:http://www.vietnamplus.vn/cuong-do-dong-dat-duoc-do-va-xep-loai-the-nao/83511.vnp

2. 2. Ứng dụng của hàm logarit trong việc tính độ chấn động và năng lượng giải toả của một trận động đất.



- Năng lượng giải toả E tại tâm địa chấn ở M độ Richte được xác định xấp xỉ bởi công thức $log E \approx 11,4 + 1,5M$

3. Âm thanh

- Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm *mức cường độ* của âm. Một đơn vị thường dùng để đo *mức cường độ* của âm là đêxinben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(dB) = 10 log \frac{I}{I_0}$ trong đó *I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét(cường độ của âm tức là năng lượng truyền đi bởi sóng âm trong một đơn vị thời gian và qua một đơn vị diện tích bề mặt vuông góc với phương sóng truyền (đơn vị đo là w/m^2)). I_0 cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12} w/m^2$).*

Nhận xét: Khi cường độ âm tăng lên $10^2, 10^3, ...$ thì cảm giác về độ to của âm tăng lên gấp 2,3,.. lần.

- *Độ to* của âm: Gắn liền với mức cường độ âm $\Delta I = I - I_{min}$ với I_{min} là *ngưỡng nghe.*(Đơn vị của độ to của âm là *phôn*). Khi $\Delta I = 1$ phôn (độ to tối thiểu mà tai người bình thường phân biệt được) thì $10 log\left(\frac{I}{I_{min}}\right) = 1dB$

Trên đây là 1 số ứng dụng hay gặp, để hiểu hơn về vấn đề này các em đọc các ví dụ phía dưới, qua đó thấy thêm được các ứng dụng khác của hàm số mũ, hàm số logarit.

B. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

Ví dụ 1: Cường độ một trận động đất *M Richte)* được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richte. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Hỏi cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu?



Ảnh minh họa hậu quả một trận động đất: Nguồn internet

■ **Phân tích bài toán**

- Để tính cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ ta sử dụng công thức đề bài cho $M = \log A - \log A_0$. Trong đó A_0 là hằng số, vậy muốn tính M các em phải tính được biên độ A. Các em coi kỹ lời giải phía dưới.
- Qua bài toán này các em thấy được những ứng dụng của hàm logarit trong các bài toán khoa học kĩ thuật.

Hướng dẫn giải

- Trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richte khi đó áp dụng công thức $M_1 = \log A - \log A_0 \Rightarrow 8 = \log A - \log A_0$ với
- Trận động đất ở Nam Mỹ có biên độ là: $4A$, khi đó cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

  $M_2 = \log(4A) - \log A_0 \Leftrightarrow M_2 = \log 4 + \log A - \log A_0 \Rightarrow M_2 = \log 4 + 8 \approx 8,6$ độ Richte

Ví dụ 2: Cường độ một trận động đất *M (Richte)* được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richte. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản.



Bản đồ khu vực ảnh hưởng của động đất ở Nhật Bản. Nguồn: USGS.

■ **Phân tích bài toán**

- Để so sánh biên độ giữa hai trận động đất thì công thức $M = \log A - \log A_0$ $\Rightarrow \log A = M + \log A_0 \Rightarrow A = 10^{M+\log A} = 10^M.10^{\log A}$. Từ đó ta đưa ra được kết luận.
- Kiến thức sử dụng trong bài toán này là kiến thức về giải phương trình logarit cơ bản và kiến thức về tính chất của hàm mũ.

Hướng dẫn giải

- Trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richte khi đó áp dụng công thức $M_1 = \log A_1 - \log A_0 \Rightarrow 8 = \log A_1 - \log A_0 \Rightarrow \log A_1 = 8 + \log A_0 \Rightarrow A_1 = 10^{8+\log A_0} = 10^{\log A_0}.10^8$ với A_1 là biên độ của trận động đất ở San Francisco.
- Trận động đất ở Nhật có cường độ 6 độ Richte khi đó áp dụng công thức $M_2 = \log A_2 - \log A_0 \Rightarrow 6 = \log A_2 - \log A_0 \Rightarrow \log A_2 = 6 + \log A_0 \Rightarrow A_2 = 10^{6+\log A_0} = 10^{\log A_0}.10^6$ với A_2 là biên độ của trận động đất ở Nhật.
- Khi đó ta có $\frac{A_1}{A_2} = \frac{10^8}{10^6} = 10^2 \Rightarrow A_1 = 100A_2$
- Vậy trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp 100 lần biên độ trận động đất ở Nhật bản.

Ví dụ 3: Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm *mức cường độ* của âm. Một đơn vị thường dùng để đo *mức cường độ* của âm là đềxinben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(dB) = 10\log\frac{I}{I_0}$ trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12} w/m^2$)

Một cuộc trò chuyện bình thường trong lớp học có mức cường độ âm trung bình là 68dB. Hãy tính cường độ âm tương ứng ra đơn vị w/m^2



Ảnh minh họa: Nguồn internet

■ **Phân tích bài toán**

- Đề bài cho biết mức cường độ âm một cuộc nói chuyện trong lớp là $L(dB) = 68dB$ yêu cầu ta tính cường độ âm I? Ở đây các em biết rằng cường độ âm ở ngưỡng nghe bình thường là $I_0 = 10^{-12} w/m^2$.
- Từ những phân tích trên ta chỉ cần áp dụng công thức $L(dB) = 10\log\frac{I}{I_0}$ và sử dụng kiến thức về giải phương trình logarit cơ bản là tìm được câu trả lời cho bài toán. Các em tham khảo lời giải ở phía dưới nhé.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ta có $L(dB) = 68dB, I_0 = 10^{-12} w/m^2$. Tính I.

Áp dụng công thức ta có: $L(dB) = 10\log\frac{I}{I_0} \Leftrightarrow 68 = 10\log\frac{I}{I_0} \Leftrightarrow \log\frac{I}{I_0} = 6,8 \Leftrightarrow \frac{I}{I_0} = 10^{6,8}$

$\Leftrightarrow \frac{I}{I_0} \approx 6,3.10^6 \Rightarrow I \approx 6,3.10^6.10^{-12} \approx 6,3.10^{-6} w/m^2$

Ví dụ 4: Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm *mức cường độ* của âm. Một đơn vị thường dùng để đo *mức cường độ* của âm là đềxinben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(dB) = 10\log\frac{I}{I_0}$ trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12} w/m^2$)

Hai cây đàn ghita giống nhau, cùng hòa tấu một bản nhạc. Mỗi chiếc đàn phát ra âm có mức cường độ âm trung bình là 60dB. Hỏi mức cường độ âm tổng cộng do hai chiếc đàn cùng phát ra là bao nhiêu?



Ảnh minh họa: Nguồn internet

■ **Phân tích bài toán**

- Trong bài toán này ta biết được mức cường độ trung bình phát ra từ một cây đàn ghita. Đề bài yêu cầu tìm mức cường độ tổng cộng phát ra từ 2 cây đàn ghita. *Như vậy muốn xử lý bài toán này các em phải chú ý rằng khi dùng một chiếc đàn có cường độ của âm là I_1 thì khi ta dùng hai chiếc đàn cùng một lúc thì cường độ của âm là $2I_1$*. Nếu ta nắm được chi tiết này thì bài toán này hóa giải không khó. Các em coi lời giải ở dưới nhé.
- Bài toán này về mặt tính toán không có gì phức tạp, nhưng ý nghĩa thực tế của nó thì lớn. Ví dụ một trung tâm dạy đàn ghita, phòng học dạy trung bình 15 học viên, tương ứng 15 cây đàn. Trung tâm phải đảm bảo âm thanh phát ra từ các cây đàn không ảnh hưởng đến nhà xung quanh, khi đó phải lắp cửa cách âm. Khi đó chuyện tính mức cường độ âm (độ to) tổng cộng của 15 cây đàn là cần thiết đối với nhà thầu xây dựng.

Hướng dẫn giải

- Mức cường độ âm do một chiếc đàn ghita phát ra là: $L_1 = 10\log\frac{I_1}{I_0} = 60dB$
- Mức cường độ âm do hai chiếc đàn ghita cùng phát ra là:

$$L_2 = 10\log\frac{2I_1}{I_0} = 10\log 2 + 10\log\frac{I_1}{I_0} = 10.\log 2 + 60 \approx 63dB$$

- Vậy có thêm một chiếc đàn (phát ra âm cùng lúc) thì mức cường độ âm tăng thêm 3 dB.

Ví dụ 5: Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm *mức cường độ* của âm. Một đơn vị thường dùng để đo *mức cường độ* của âm là đềxinben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(dB) = 10\log\frac{I}{I_0}$ trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12} w/m^2$)

Tiếng ồn phát ra từ một xưởng cưa, ở mức cường độ âm đo được là 93 dB, do 7 chiếc cưa máy giống nhau cùng hoạt động gây ra. Giả sử có 3 chiếc cưa máy đột ngột ngừng hoạt động thì mức cường độ âm trong xưởng lúc này là bao nhiêu?



Ảnh minh họa: Nguồn internet

■ **Phân tích bài toán**

- Trong bài toán này ta biết được mức cường độ đo được phát ra từ 7 cái cưa máy. Đề bài yêu cầu tìm mức cường độ tổng cộng phát ra từ 4 cưa máy là bao nhiêu. *Như vậy muốn xử lý bài toán này các em phải chú ý rằng khi dùng một cưa máy có cường độ của âm là I_1 thì khi ta dùng 7 (hay 4) cưa máy cùng một lúc thì cường độ của âm là $7I_1\left(hay\, 4I_1\right)$*. Nếu ta nắm được chi tiết này thì bài toán này hoá giải không khó. Các em coi lời giải ở dưới nhé.
- Việc tính toán trong bài này các em sử dụng trực tiếp các tính chất về logarit là xử lý gọn gàng bài toán.

Hướng dẫn giải

- Gọi cường độ của âm do 1 cái cưa phát ra là: I_1
- Lúc đầu mức cường độ âm là: (7 cưa máy cùng họat động)

$$L\left(dB\right)=10log\frac{7I_1}{I_0}=93dB\Leftrightarrow 10log7+10log\frac{I_1}{I_0}=93\Rightarrow log\frac{I_1}{I_0}=9,3-10log7=8,45.$$

- Lúc sau mức cường độ âm là: (3 cưa máy hỏng nên còn 4 cưa máy họat động)

$$L_1\left(dB\right)=10log\frac{4I_1}{I_0}=10log4+10log\frac{I_1}{I_0}=10log4+10.8,45\approx 90,5dB.$$

Ví dụ 6: Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm *mức cường độ* của âm. Một đơn vị thường dùng để đo *mức cường độ* của âm là đềxinben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L\left(dB\right)=10log\frac{I}{I_0}$ trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0=10^{-12}w/m^2$)

Tiếng ồn phát ra từ tiếng gõ phím liên tục ở một bàn phím của máy vi tính, có cường độ âm đo được là $10^{-5}w/m^2$. Giả sử trong phòng làm việc của một công ty có hai nhân viên văn phòng cùng thực hiện thao tác gõ phím trên hai bàn phím máy vi tính giống nhau thì mức cường độ âm tổng cộng do cả hai bàn phím phát ra cùng lúc là bao nhiêu?



Ảnh minh họa: Nguồn internet

■ **Phân tích bài toán**

Trong bài toán này ta biết được cường độ đo được từ tiếng gõ phím liên tục ở một bàn phím của máy vi tính, có cường độ âm đo được là $10^{-5}w/m^2$. I_0 cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0=10^{-12}w/m^2$). Đề bài yêu cầu tìm mức cường độ tổng cộng phát ra từ tiếng gõ phím liên tục của hai bàn phím của máy vi tính là bao nhiêu. Các em theo dõi lời giải phía dưới nhé.

Hướng dẫn giải

- Nếu chỉ có một bàn phím gõ $L_1=10log\frac{I_1}{I_0}=10log\frac{10^{-5}}{10^{-12}}=70dB$

- Cả hai bàn phìm cùng gõ: $L_2 = 10log\frac{2I_1}{I_0} = 10log2 + 10log\frac{I_1}{I_0} = 10.log2 + 70 \approx 73dB$
- Vậy có thêm một bàn phím gõ thì mức cường độ âm tăng thêm 3 dB.

Ví dụ 7: Cho biết chu kì bán hủy của chất phóng xạ plutônium Pu^{239} là 24.360 năm(tức là lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân hủythì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủyđược tính bởi công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủyhàng năm ($r < 0$), t là thời gian phân huỷ, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 10 gam Pu^{239} sau bao nhiêu năm phân hủysẽ còn 1 gam?



Ảnh minh họa: Phát hiện ra plutonium trong khuôn viên nhà máy điện hạt nhân Fukushima số I.

■ Phân tích bài toán

Đây là bài toán về chất phóng xạ, từ công thức $S = Ae^{rt}$ ta thấy có 4 đại lượng. Yêu cầu của bài toán tìm t sao cho Pu^{239} phân hủycòn lại 1gam, đọc đề bài các em thấy ta phải đi tìm tỉ lệ phân hủyhàng năm của Pu^{239}? Để tìm được tỉ lệ phân hủycác em phải biết cách khai thác giả thiết sau: *chu kì bán hủycủa chất phóng xạ plutônium Pu^{239} là 24.360 năm (tức là lượng Pu^{239} sau 24.360 năm phân hủythì chỉ còn lại một nửa).*
Trong bài này các em hiểu như sau: sau thời gian $t = 24.360$ năm, lượng Pu^{239} từ $A = 10gam$ còn lại là $S = 5gam$, từ đó các em tính tỉ lệ phân hủy r dễ dàng.
Các em theo dõi lời giải phía dưới nhé.

Hướng dẫn giải

- Trước tiên, ta tìm tỉ lệ phân hủyhàng năm của Pu^{239}.
- Pu^{239} cóchu kì bán hủycủa chất phóng xạ plutônium Pu^{239} là 24.360 năm, do đó ta có $5 = 10.e^{r.24360} \Leftrightarrow r = \dfrac{ln\frac{5}{10}}{24.360} \Leftrightarrow r = \dfrac{ln5 - ln10}{24.360} \approx -2,84543.10^{-5} \approx -0,000028$
- Vậy sự phân hủycủa Pu^{239} được tính bởi công thức $S = Ae^{-0,000028t}$ trong đó S, A tính bằng gam, t tính bằng năm.
- Theo đề bài cho ta có: $1 = 10.e^{-0,000028t} \Leftrightarrow t = -\dfrac{ln10}{-0,000028} \approx 82235$ năm.
- Vậy sau khoảng 82235 năm thì 10 gam Pu^{239} sẽ phân hủycòn lại 1 gam.
-

■ Bình luận: ***Qua các bài toán các em biết được.***
Một là, một lượng chất phóng xạ nhỏ, mà thời gian để phân hủyphải cần tới mấy ngàn năm. Hai là, mức độ nguy hiểm của chất phóng xạ, để biết rõ hơn các em đọc bài viết phía dưới: Tác hại của chất phóng xạ plutonium..

☒ **Bài đọc thêm**

Tác hại của chất phóng xạ plutonium

Ông Takahashi Sentaro, Phó Giám đốc Viện nghiên cứu lò phản ứng trường Đại học Kyoto, trên NHK, phân tích về tác hại của của plutonium nhân việc phát hiện ra plutonium trong khuôn viên nhà máy điện hạt nhân Fukushima số I.



Một bức ảnh chụp nhà máy điện hạt nhân Fukushima từ trực thăng hôm 11/3. Ảnh: AP

Plutonium là chất phóng xạ do uranium 239 hoặc 235 sinh ra, và nó phát ra tia phóng xạ có tên gọi là tia alpha. Đặc tính của tia alpha này là dù có bám vào da người thì nó cũng không xâm nhập trực tiếp vào cơ thể con người mà xâm nhập gián tiếp qua các loại thực phẩm bị nhiễm xạ hoặc qua đường thở.

Ví dụ, trong trường hợp chất plutonium 239 thì chu kỳ bán rã của chất này rất dài, khoảng 20.000 năm. Vì thế một khi đã nhiễm vào cơ thể con người thì nó vẫn sẽ tiếp tục phát xạ tại nơi mà nó đã xâm nhập vào và vì vậy mà khả năng bị ung thư là khá cao.

Cơ thể con người có khả năng loại thải plutonium, vì thế nếu bị nhiễm xạ thì trong vòng vài tháng lượng plutonium trong cơ thể sẽ giảm xuống một nửa. Tuy nhiên người ta cho rằng plutonium thường ở trong cơ thể con người lâu hơn so với chất phóng xạ iodine và cesium.

Nếu trong tương lai không xảy ra một vụ tai nạn hạt nhân nào lớn nữa thì lượng phóng xạ hiện nay không gây nguy hiểm tới sức khoẻ con người cũng như cho môi trường. Nhưng cần phải nhắc lại rằng chất phóng xạ plutonium phát ra từ vụ thử hạt nhân do Mỹ tiến hành tại đảo san hô Bikini trước kia, nay vẫn còn được phát hiện ra ở vùng biển ngoài khơi Nhật Bản. Vì thế nếu plutonium bị rò rỉ ra nước biển thì cần phải tiến hành giám sát lượng phóng xạ trong hải sản trong một thời gian dài.

Hơn nữa, plutonium không phát tán trên diện rộng vì vậy dễ có khả năng là nồng độ plutonium trong khuôn viên nhà máy điện hạt nhân Fukushima số I sẽ rất cao. Vì thế cần phải giám sát liên tục, chặt chẽ lượng phóng xạ tại đây, đồng thời phải đảm bảo sự an toàn cho các công nhân làm việc tại đây bằng nhiều biện pháp, ví dụ như cho họ đeo mặt nạ phòng hộ, tránh không ăn uống trong các khu vực lân cận.

(Nguồn: http://vnexpress.net/tin-tuc/khoa-hoc/ta-c-ha-i-cu-a-chat-phong-xa-plutonium-2191312.html)

Ví dụ 8: Các loại cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cây xanh đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng dừng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp và chuyển hóa thành nitơ 14.

Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức $P(t)=100.(0,5)^{\frac{t}{500}}(\%)$. Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 65%.
Hãy xác định niên đại của công trình đó.



Ảnh minh họa: Nguồn internet

■ Phân tích bài toán

- Đây là một bài toán có ý nghĩa về khảo cổ học, nghiên cứu về lịch sử thời xưa. Bằng những kiến thức toán học các nhà khảo cổ học hoàn toàn biết được công trình kiến trúc đó được xây dựng từ năm nào, để từ đó có những kết luận chính xác nhất.
- Trong bài toán này để xác định niên đại của công trình kiến trúc t, các em sử dụng công thức đề bài cho $P(t)=100.(0,5)^{\frac{t}{500}}(\%)$ trong đó ta đã biết $P(t)=65$, từ đó sử dụng kiến thức về giải phương trình mũ các em tìm t dễ dàng. Các em coi lời giải ở dưới nhé.

Hướng dẫn giải

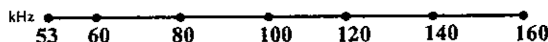
- Theo đề bài ta có $P(t)=65$. Vậy ta có phương trình

$$100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}=65 \Leftrightarrow (0,5)^{\frac{t}{5750}}=\frac{65}{100} \Leftrightarrow \frac{t}{5750}=\log_{0,5}\frac{65}{100}$$

$$\Leftrightarrow t=5750.\log_{0,5}\frac{65}{100}$$

- Vậy tuổi của công trình kiến trúc đó là khoảng 3.574 năm.

Ví dụ 9: Trên mỗi chiếc radio đều có các vạch chia để người sử dụng dễ dàng chọn đúng sóng radio cần tìm. Biết rằng vạch chia ở vị trí cách vạch tận cùng bên trái một khoảng $d\,(cm)$ thì ứng với tần số $F=ka^{d}\,(kHz)$, trong đó k và a là hai hằng số được chọn sao cho vạch tận cùng bên trái ứng với tần số $53kHz$, vạch tận cùng bên phải ứng với tần số $160kHz$ và hai vạch này cách nhau $12cm$



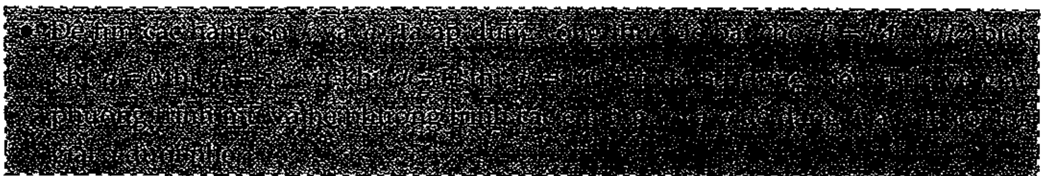
a) Tính k và a (tính a chính xác đến hàng phần nghìn)
b) Tìm $d\,(cm)$ biết rằng vạch đó là chương trình ca nhạc có tần số là $F=120kHz$.



Ảnh minh họa: Nguồn internet

■ Phân tích bài toán

[illegible]


[redacted]

Hướng dẫn giải

a) Khi $d = 0$ thì $F = 53$ và khi $d = 12$ thì $F = 160$,

ta có hệ phương trình $\begin{cases} 53 = ka^0 \\ 160 = ka^{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 53 \\ a^{12} = \dfrac{160}{53} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 53 \\ a = \sqrt[12]{\dfrac{160}{53}} \approx 1{,}096 \end{cases}$

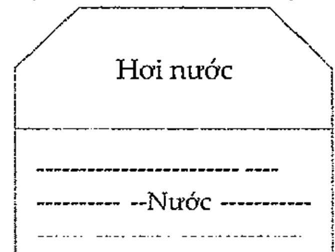
Vậy $k = 53, a = 1{,}096$

b) Chương trình ca nhạc có tần số là $F = 120kHz$, vậy ta có phương trình

$$120 = ka^d \Leftrightarrow a^d = \frac{120}{k} \Leftrightarrow d = \log_a \frac{120}{k} \Leftrightarrow d = \log_{1,096} \frac{120}{53} = 8{,}91(cm).$$

Vậy muốn mở tới ngay chương trình ca nhạc, ta chỉnh đến vạch chia cách vạch ban đầu một khoảng 8,91 cm.

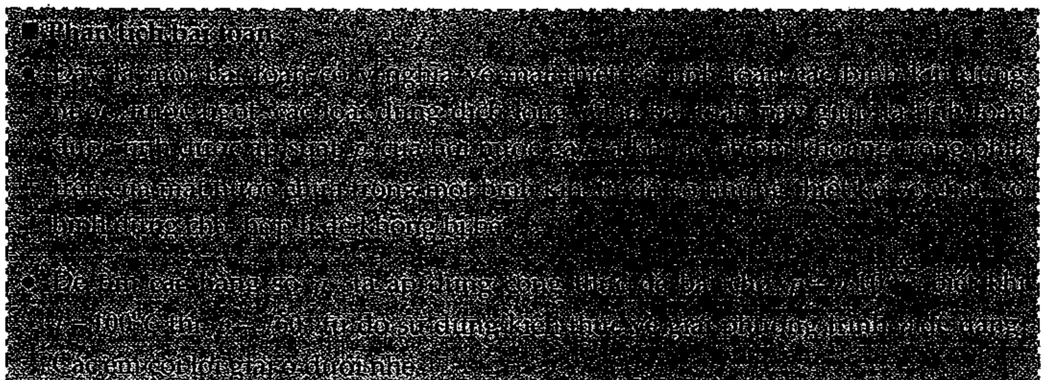
Ví dụ 10: Khoảng 200 năm trước, hai nhà khoa học Pháp là Clô – zi – ut (R. Clausius) và Clay –pay – rông (E. Claypeyron) đã thấy rằng áp suất p của hơi nước (tính bằng milimét thủy ngân, viết tắt là mmHg) gây ra khi nó chiếm khoảng trống phía trên của mặt nước chứa trong một bình kín (coi hình vẽ bên dưới) được tính theo công thức $p = a.10^{\frac{k}{t+237}}$



Trong đó t là nhiệt độ C của nước, a và k là những hằng số. Cho biết $k \approx -2258{,}624$

a) Tính a biết rằng khi nhiệt độ của nước là 100^0C thì áp suất của hơi nước là $760mmHg$ *(tính chính xác đến hàng phần trục)*

b) Tính áp suất của hơi nước khi nhiệt độ của nước ở 40^0C. *(tính chính xác đến hàng phần trục)*


[redacted]

Hướng dẫn giải

a) Khi $t = 100^0C$ thì $p = 760$. Do đó ta có phương trình (ẩn a)

$$760 = a.10^{\frac{-2258,624}{373}} \Rightarrow a \approx 863188841{,}4$$

b) Áp suất của hơi nước khi nhiệt độ của nước ở 40^0C là:

$$p = 863188841{,}4.10^{\frac{-2258,624}{40+237}} \Rightarrow p \approx 52{,}5mmHg.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

Câu 1: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao nhiêu quý thì người đó có được ít nhất 20 triệu?

A. 15 quý. **B.** 16 quý. **C.** 17 quý. **D.** 18 quý.

Câu 2: Sau nhiều năm làm việc anh Nam tiết kiệm được P đồng, dự định số tiền đó để mua một căn nhà. Nhưng hiện nay với số tiền đó thì anh ta chưa thể mua được ngôi nhà vì giá trị ngôi nhà mà anh ta muốn mua là $2P$ đồng. Vì vậy anh Nam gửi tiết kiệm số tiền này vào ngân hàng X. Theo bạn sau bao nhiêu năm anh Nam mới có thể sở hữu được ngôi nhà đó. Biết rằng lãi suất gửi tiết kiệm là 8,4% một năm, lãi hàng năm được nhập vào vốn và giá của ngôi nhà đó không thay đổi trong 12 năm tới. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

A. 9 năm. **B.** 10 năm. **C.** 8 năm. **D.** 11 năm.

[redacted]

Câu 4: Một học sinh 16 tuổi được hưởng tài sản thừa kế 200 000 000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong một ngân hàng với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh này chỉ nhận được số tiền này khi đã đủ 18 tuổi. Biết rằng khi đủ 18 tuổi, số tiền mà học sinh này được nhận sẽ là 228 980 000 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn 1 năm của ngân hàng này là bao nhiêu?

A. 6% / năm. **B.** 5% / năm. **C.** 7% / năm. **D.** 8% / năm.

[redacted]

Đề bài dùng cho câu 6, câu 7: ***(Trích đề thi HSG tỉnh ĐaKnông năm 2009)***

Bố Hùng để dành cho Hùng 11.000 USD để học đại học trong ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,73% một tháng. Mỗi tháng Hùng đến rút 60USD để sinh sống.

Câu 6: Hỏi sau một năm số tiền còn lại là bao nhiêu? *(Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)*

A. 1254USD. **B.** 1259USD. **C.** 1257USD. **D.** 1256USD.

Câu 7: Nếu mỗi tháng rút 200 USD thì sau bao lâu sẽ hết tiền? *(Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)*

A. 65 tháng. **B.** 81 tháng. **C.** 71 tháng. **D.** 75 tháng.

Câu 8: Tỉ lệ tăng dân số hàng năm của In – đô – nê – xia – a là 1,5%. Năm 1998, dân số của nước này là 212.942.000 người. Hỏi dân số của In – đô – nê – xia – a vào năm 2006 gần với số nào sau đây nhất?

A. 240.091.000. **B.** 250.091.000. **C.** 230.091.000. **D.** 220.091.000.

Câu 9: Biết rằng *tỉ lệ giảm dân* hàng năm của Nga là 0,5%. Năm 1998, dân số của Nga là 146.861.000 người. Hỏi năm 2008 dân số của Nga gần với số nào sau đây nhất?

A. 135.699.000 **B.** 139.699.000 **C.** 140.699.000 **D.** 145.699.000

Câu 10: Biết rằng *tỉ lệ giảm dân* hàng năm của I – ta – li -a là 0,1%. Năm 1998, dân số của Nga là 56.783.000 người. Hỏi năm 2020 dân số của nước này gần với số nào sau đây nhất?

A. 56.547.000. **B.** 55.547.000. **C.** 54.547.000. **D.** 53.547.000.

Câu 11: Tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Nhật là $0,2\%$. Năm 1998, dân số của Nhật là 125932000. Vào năm nào dân số của Nhật sẽ là 140000000? *(Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)*

A. 2061. **B.** 2055. **C.** 2051. **D.** 2045.

Câu 12: Tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Ấn độ là 1,7%. Năm 1998, dân số của Ấn độ là 984 triệu. Hỏi sau bao nhiêu năm dân số của Ấn độ sẽ đạt 1,5 tỉ? *(Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)*

A. 15 **B.** 25 **C.** 20 **D.** 29

Câu 13: Nếu cường độ âm tăng lên 1000 lần thì độ to của âm thay đổi như thế nào?

A. Tăng 10 dB. **B.** Tăng 3 lần. **C.** Giảm 30dB. **D.** Tăng 30 dB.

Câu 14: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức P giảm theo công thức $P = P_0 e^{xi}$ trong đó $P_0 = 760mmHg$ là áp suất ở mực nước biển $(x = 0)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao $1000m$ thì áp suất của không khí là $672,71mmHg$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao $3000m$ gần với số nào sau đây nhất?

A. $530,23mmHg$. **B.** $540,23mmHg$. **C.** $520,23mmHg$. **D.** $510,23mmHg$.

Câu 15: Một khu rừng có trữ lượng gỗ 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ?

A. 545470 **B.** 488561. **C.** 465470 **D.** 535470

Câu 16: Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức: $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Cho biết chu kì bán rã của một chất phóng xạ là 24 giờ (1 ngày đêm). Hỏi 250 gam chất đó sẽ còn lại bao nhiêu sau $3,5$ ngày đêm? (Kết quả làm tròn đến 3 chữ số thập phân sau dấu phẩy)

A. $22,097$ (gam). **B.** $23,097$ (gam). **C.** $20,097$ (gam). **D.** $24,097$ (gam

Câu 17: Năm 1994, tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là $\frac{358}{10^6}$. Biết rằng tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí tăng 0,4% hàng năm. Hỏi năm 2004, tỉ lệ khí CO_2 trong không khí gần với số nào sau đây nhất?

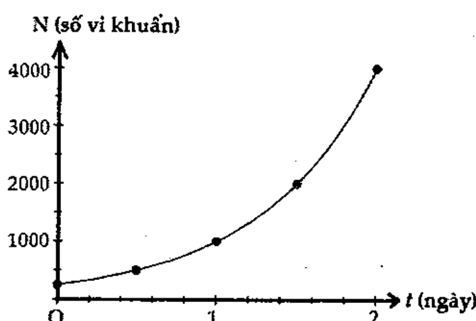
A. 393.10^{-6}. **B.** 379.10^{-6}. **C.** 373.10^{-6}. **D.** 354.10^{-6}.

[redacted]

Câu 19: Cường độ một trận động đất *M (richter)* được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ gần với số nào sau đây nhất là:

A. 7,9. **B.** 8,6. **C.** 8,5. **D.** 8,9.

Câu 20: Biểu đồ bên cho thấy kết quả thống kê sự tăng trưởng về số lượng của một đàn vi khuẩn : cứ sau 12 tiếng thì số lượng của một đàn vi khuẩn tăng lên gấp 2 lần. Số lượng vi khuẩn ban đầu của đàn là 250 con. Công thức nào dưới đây thể hiện sự tăng trưởng về số lượng của đàn vi khuẩn N tại thời điểm t?



Biểu đồ về sự tăng trưởng của đàn vi khuẩn theo thời gian t

A. $N = 500.t^{12}$. **B.** $N = 250.2^t$. **C.** $N = 250.2^{\frac{t}{2}}$. **D.** $N = 250.2^{2t}$.

(Trích đề thi thử lần 7 – Group toán 3K)

Câu 21: Thang đo Richter được Charles Francis Richter đề xuất và sử dụng lần đầu tiên vào năm 1935 để sắp xếp các số đo độ chấn động của các cơn động đất với đơn vị là độ Richter. Công thức tính độ chấn động như sau: $M_L = \log A - \log A_o$, với M_L là độ chấn động, A là biên độ tối đa đo được bằng địa chấn kế và A_0 là một biên độ chuẩn. (nguồn: ***Trung tâm tư liệu khí tượng thủy văn***). Hỏi theo thang độ Richter, với cùng một biên độ chuẩn thì biên độ tối đa của một trận động đất 7 độ Richter sẽ lớn gấp mấy lần biên độ tối đa của một trận động đất 5 độ Richter?

A. 2 . **B.** 20. **C.** $10^{\frac{7}{5}}$. **D.** 100.

(Trích đề thi thử lần 8 – Group toán 3K)

Câu 22: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với kì hạn 3 tháng (1 quí), lãi suất 6% một quí theo hình thức lãi kép (lãi cộng với vốn). Sau đúng 6 tháng, người đó lại gửi thêm 100 triệu đồng với hình thức và lãi suất như trên. Hỏi sau 1 năm tính từ lần gửi đầu tiên người đó nhận số tiền gần với kết quả nào nhất?

A .239 triệu đồng. **B.** 230 triệu đồng. **C.** 243 triệu đồng. **D.** 236 triệu đồng.

(Trích đề thi giữa kỳ 1 năm 2016 trường THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội)

[redacted]

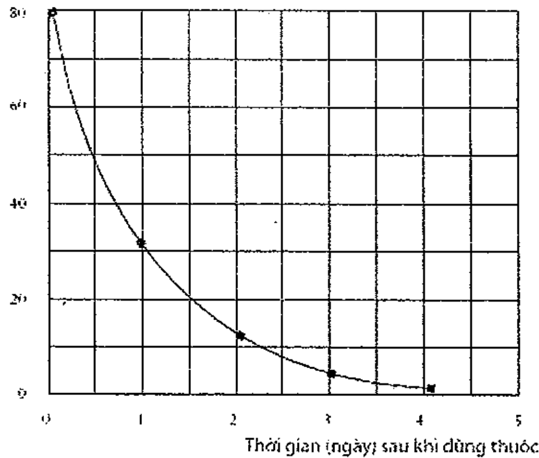
Câu 24: Theo thể thức lãi kép, nghĩa là nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp. Nếu một người gửi số tiền A với lãi suất r mỗi kì thì sau N kì, số tiền người ấy thu được cả vốn lẫn lãi là $C = A(1+r)^N$ (triệu đồng). Nếu bạn gửi 20 triệu đồng vào ngân hàng X theo thể thức lãi kép với lãi suất $8,65\%$ một quý thì sau 3 năm (vẫn tính lãi suất kì hạn theo quý), bạn sẽ thu được số tiền cả vốn lẫn lãi ***gần với giá trị nào nhất*** sau đây(giả sử lãi suất hằng năm của ngân hàng X là không đổi) ?

A. 54,34 triệu đồng. **B.** 54,12 triệu đồng.

C. 25,65 triệu đồng. **D.** 25,44 triệu đồng.

Đề bài dùng chung cho câu 25, câu 26

Peter dùng 80 mg thuốc để điều chỉnh huyết áp của mình. Đồ thị dưới đây là đồ thị của hàm số mũ có dạng $y = 80.r^x$ *(với x thời gian (ngày) sau khi tiêm thuốc, r tỉ lệ về lượng thuốc của ngày hôm trước còn lại hoạt động trong máu của Peter,* y lượng thuốc còn tác dụng sau *x ngày tiêm thuốc*), chỉ số lượng thuốc đầu tiên và số lượng thuốc còn lại hoạt động trong máu của Peter sau một, hai, ba và bốn ngày.



Hình minh họa: Lượng thuốc còn theo ngày

[redacted]

Câu 27: Năng lượng giải tỏa E của một trận động đất tại tâm địa chấn ở M độ Richte được xác định bởi công thức: $log(E) = 11,4 + 1,5M$. Vào năm 1995, Thành phố X xảy ra một trận động đất 8 độ Richte và năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn của nó gấp 14

lần trận động đất ra tại thành phố Y vào năm 1997. Hỏi khi đó độ lớn của trận động đất tại thành phố Y là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trục)

A. 7,2 độ Richte **B.** 7,8 độ Richte. **C.** 8,3 độ Richte. **D.** 6,8 độ Richte.

Câu 28: Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi đơn, kì hạn 3 tháng với lãi suất 3% một quý. Hỏi người đó phải gửi trong ngân hàng ít nhất bao lâu, số tiền thu về hơn gấp hai số tiền vốn ban đầu?

A. 102 tháng. **B.** 103 tháng. **C.** 100 tháng. **D.** 101 tháng.

[redacted]

Câu 30: Một sinh viên được gia đình gửi tiết kiệm số tiền vào ngân hàng với số tiền là 20 triệu đồng theo mức kì hạn 1 tháng với lãi suất tiết kiệm là 0,4%/tháng. Nếu mỗi tháng anh sinh viện rút ra một số tiền như nhau vào ngày ngân hàng tính lãi thì hàng tháng anh ta rút ra bao nhiêu tiền để sau 5 năm, số tiền vừa hết?

A. 375.594,84 đồng. **B.** 357.549,84 đồng.

C. 537.594,84 đồng. **D.** 573.594,84 đồng.

Câu 31: Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 5% một quý theo hình thức lãi kép (sau 3 tháng sẽ tính lãi và cộng vào gốc). Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 50 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Cho biết số tiền cả gốc và lãi được tính theo công thức $T = A(1+r)^n$, trong đó A là số tiền gửi, r là lãi suất và n là số kì hạn gửi. Tính tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi tiền.

A. $\approx 176,676$ triệu đồng. **B.** $\approx 178,676$ triệu đồng.

C. $\approx 177,676$ triệu đồng. **D.** $\approx 179,676$ triệu đồng.

[redacted]

Câu 33: Cường độ một trận động đất M được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở gần đó đo được 7,1 độ Richter. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu trận động đất này.

A. 1,17. **B.** 2,2. **C.** 15,8. **D.** 4.

Câu 34: Nam định mua một chiếc xe máy theo phương thức trả góp. Theo phương thức này sau một tháng kể từ khi nhận xe phải trả đều đặn mỗi tháng một lượng tiền nhất định nào đó, liên tiếp trong vòng 24 tháng. Giả sử giá xe máy thời điểm Nam mua là 16 triệu (đồng) và giả sử lãi suất công ty tài chính cho vay tiền là 1% một

tháng trên số tiền chưa trả. Với mức phải trả hàng tháng gần với kết quả nào sau đây nhất thì việc mua trả góp là chấp nhận được?

A. 755 ngàn mỗi tháng. **B.** 751 ngàn mỗi tháng.

C. 826 ngàn mỗi tháng. **D.** 861 ngàn mỗi tháng.

Câu 35: Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức: $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (*tại thời điểm t =* 0); *T* là chu kì bán rã (*tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác*). Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cabon và xác định được nó đã mất khoảng 25% lượng Cabon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó có tuổi là bao nhiêu?

A. 2378 năm. **B.** 2300 năm. **C.** 2387 năm. **D.** 2400 năm.

(Trích đề ôn tập Group nhóm toán)

Câu 36: Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu % mỗi tháng. Sau *t* tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh được cho bởi công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1), t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì nhóm học sinh nhớ được danh sách đó dưới 10%?

A. 24.79 tháng **B.** 25 tháng **C.** 24 tháng **D.** 22 tháng

(Trích đề ôn tập Group nhóm toán)

Câu 37: Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau *x* quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x) = \frac{100}{1 + 49e^{-0.015x}}, x \geq 0$. Hãy tính số quảng cáo được phát tối thiểu để số người mua đạt hơn 75%.

A. 333. **B.** 343. **C.** 330. D. 323.

(Trích đề ôn tập Group nhóm toán)

Câu 38: Một người gửi tiết kiệm số tiền 100.000.000 VNĐ vào ngân hàng với lãi suất 8% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau 15 năm, số tiền người ấy nhận về là bao nhiêu? (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng)

A. 117.217.000 VNĐ **B.** 417.217.000 VNĐ

C. 317.217.000 VNĐ **D.** 217.217.000 VNĐ

(Trích đề thi Sở giáo dục Hưng Yên năm 2016)

Câu 39: Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 5% một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu. Sau n năm ($n \in \mathbb{N}^*$), nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, người đó nhận được

A. $100.(1,05)^{n-1}$ triệu đồng. **B.** $100.(1,05)^{2n}$ triệu đồng.

C. $100.(1,05)^{n}$ triệu đồng. **D.** $100.(1,05)^{n+1}$ triệu đồng.

(Trích đề thi thử 01 câu lạc bộ giáo viên trẻ TP. Huế)

Câu 40: Bà A gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép (đến kì hạn mà người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp) với lãi suất 7% một năm. Hỏi sau 2 năm bà A thu được lãi là bao nhiêu (giả sử lãi suất không thay đổi)?

A. 15 (triệu đồng). **B.** 14,49 (triệu đồng).

C. 20 (triệu đồng). **D.** 14,50 (triệu đồng).

(Trích đề thi thử số 3 – Tạp chí Toán học tuổi trẻ số 473 tháng 11 năm 2016)

[redacted]

Câu 42: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 7,56% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi, hỏi số tiền người đó thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 5 năm là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?

A. $22,59$ triệu đồng. **B.** $20,59$ triệu đồng.

C. $19,59$ triệu đồng. **D.** $21,59$ triệu đồng.

(Trích đề thi thử trường THPT Nguyễn Gia Thiều)

[redacted]

Câu 44: Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1%/tháng. Gửi được hai năm 6 tháng người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Số tiền người đó rút được là:

A. $101.\left[(1,01)^{30}-1\right]$(triệu đồng). **B.** $101.\left[(1,01)^{29}-1\right]$ (triệu đồng).

C. $100.\left[(1,01)^{30}-1\right]$ (triệu đồng). **D.** $100.\left[(1,01)^{30}-1\right]$ (triệu đồng).

(Trích đề thi thử Trường THPT Nguyễn Xuân Nguyên)

Câu 45: Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1%/tháng. Gửi được hai năm 4 tháng người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Số tiền người đó rút được là:

A. $100.\left[(1,01)^{27}-1\right]$(triệu đồng). **B.** $101.\left[(1,01)^{27}-1\right]$ (triệu đồng).

C. $100.\left[(1,01)^{28}-1\right]$ (triệu đồng). **D.** $101.\left[(1,01)^{28}-1\right]$ (triệu đồng).

(Trích đề thi thử Trường THPT Nguyễn Xuân Nguyên)

Câu 46: Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng có kì hạn là quý, theo hình thức lãi kép với lãi suất 2% một quý. Hỏi sau 2 năm người đó lấy lại được tổng là bao nhiêu tiền?

A. 171 triệu. **B.** 117,1 triệu. **C.** 160 triệu. **D.** 116 triệu.

(Đề thi thử trường THPT Quảng Xương 1 – Thanh Hoá năm 2016)

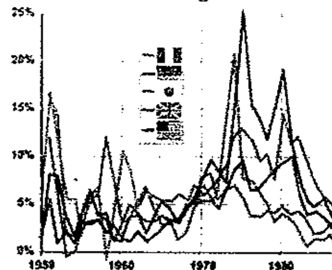
Câu 47: Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn được tính theo công thức $f(t)=Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỷ lệ tăng trưởng $(r>0)$, t (tính theo

giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu có 1000 con và sau 10 giờ là 5000 con. Hỏi sao bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần.

A. $5\ln 20$ (giờ) **B.** $5\ln 10$ (giờ) **C.** $10\log_5 10$ (giờ) **D.** $10\log_5 20$ (giờ)

(Trích đề ôn tập Group nhóm toán)

Câu 48: Trong kinh tế vĩ mô (macroeconomics), lạm phát là sự tăng mức giá chung của hàng hóa và dịch vụ theo thời gian và sự mất giá trị của một loại tiền tệ. Khi so sánh với các nước khác thì lạm phát là sự giảm giá trị tiền tệ của một quốc gia này so với các loại tiền tệ của quốc gia khác. Theo nghĩa đầu tiên thì người ta hiểu lạm phát của một loại tiền tệ tác động đến phạm vi nền kinh tế một quốc gia, còn theo nghĩa thứ hai thì người ta hiểu lạm phát của một loại tiền tệ tác động đến phạm vi nền kinh tế sử dụng loại tiền tệ đó. Phạm vi ảnh hưởng của hai thành phần này vẫn là một vấn đề gây tranh cãi giữa các nhà kinh tế học vĩ mô. Ngược lại với lạm phát là giảm phát. Một chỉ số lạm phát bằng 0 hay một chỉ số dương nhỏ thì được người ta gọi là sự "ổn định giá cả".



Hình minh họa: Tỷ lệ lạm phát của 5 thành viên chính của G8 từ1950 tới 1994

(Theo https://vi.wikipedia.org/wiki/L%E1%BA%A1m_ph%C3%A1t)

[redacted]

Câu 49: Ông B đến siêu thị điện máy để mua một cái laptop với giá 15,5 triệu đồng theo hình thức trả góp với lãi suất 2,5% một tháng. Để mua trả góp ông B phải trả trước 30% số tiền, số tiền còn lại ông sẽ trả dần trong thời gian 6 tháng kể từ ngày mua, mỗi lần trả cách nhau 1 tháng. Số tiền mỗi tháng ông B phải trả là như nhau và tiền lãi được tính theo nợ gốc còn lại ở cuối mỗi tháng. Hỏi, nếu ông B mua theo hình thức trả góp như trên thì số tiền phải trả nhiều hơn so với giá niêm yết là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không đổi trong thời gian ông B hoàn nợ và hàng tháng ông B đều trả tiền đúng hạn. *(Kết quả làm tròn đến chữ số hàng chục nghìn)*

A. 1.628.000 đồng. **B.** 1.628.000 đồng.

C. 1.628.000 đồng. **D.** 1.628.000 đồng.

Nguồn tham khảo: http://toanhocbactrungnam.vn/

[redacted]

HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

Câu 1. Đáp án D

Áp dụng công thức (2) : $P_n = P_0(1+r)^n$

[redacted]

Câu 2. Đáp án A

Áp dụng công thức (2) tính số tiền lĩnh sau n năm gởi tiết kiệm với lãi suất như trên là $P_n = P_0(1+0,084)^n = P(1,084)^n$

Theo yêu cầu bài toán đặt ra, ta có:

$P_n = 2P \Leftrightarrow P(1,084)^n = 2P \Leftrightarrow (1,084)^n = 2 \Leftrightarrow n = log_{1,084} 2 \approx 8,59 \Rightarrow n = 9$

Câu 3. Đáp án B

[redacted]

Câu 4. Đáp án C

Áp dụng công thức (2) $P_n = P_o(1+r)^n$

Với $P_0 = 200000000, P_2 = 228980000, r = n = 2$. Tính r

Khi đó: $P_2 = 228.980.000 \Leftrightarrow 200.000.000(1+r)^2 = 228.980.000 \Leftrightarrow (1+r)^2 = 1,1499$

$\Rightarrow r = \sqrt{1,1499} - 1 = 0,07 = 7\%$

Câu 5. Đáp án A

Gọi n là số tháng gửi với lãi suất 0,7% tháng và m là số tháng gửi với lãi suất 0,9% tháng.

Khi đó, số tiền gửi cả vốn lẫn lãi là:

$5.000.000.(1+0,07)^n.(1+0,115)^6.(1+0,09)^m = 5747478,359$

Do $n \in \mathbb{N}, n \in [1;12]$ nên ta thử lần lượt các giá trị là 2, 3, 4, 5,... đến khi tìm được $m \in \mathbb{N}$

Sử dụng MTCT ta tìm được $n = 5 \Rightarrow m = 4$. Do đó số tháng bạn Hùng đã gửi là 15.

Câu 6. Đáp án A

Áp dụng công thức (4): $P_n = a(1+r)^n - x\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$, (4)

Với $a = 11000USD, x = 60USD, r = 0,73\%, P_{n+1} = ?$

Số tiền trong ngân hàng sau 1 năm (12 tháng) là

$$11000(1+0,73\%)^{12}-60\frac{\left[(1+0,73\%)^{12}-1\right]}{0,73\%}\approx 11254\text{ USD}$$

Số tiền còn lại sau 1 năm là: 11.254USD

Câu 7. Đáp án C

[redacted]

Vậy sau 71 tháng Hùng sẽ hết tiền trong ngân hàng.

Câu 8. Đáp án A

Áp dụng công thức $P_n = P_0e^{n.r}$

Với $P_0 = 212.942.000, r = 1,5\%, n = 2006-1998 = 8$

Ta có $P_8 = 212.942.000e^{1.5\%\times 8} \approx 240091434,6$

Câu 9. Đáp án B

Áp dụng công thức $P_n = P_0e^{n.r}$

Với $P_0 = 146861000, r = -0,5\%, n = 2008-1998 = 10$

Ta có $P_{19} = 146861000e^{-0.5\%\times 10} = 139527283,2$

Câu 10. Đáp án B

Áp dụng công thức $P_n = P_0e^{n.r}$

Với $P_0 = 56783000, r = -0,1\%, n = 2020-1998 = 22$

Ta có $P_8 = 56783000e^{-0,1\%\times 22} \approx 55547415,27$

Câu 11. Đáp án C

[redacted]

Câu 12. Đáp án B

Áp dụng công thức $P_n = P_0e^{n.r}$

Với $P_0 = 984.10^6, r = 0 = 1,7\%, P_n = 1500.10^6$. Tính n?

Ta có $P_n = 984.10^6e^{01.7\%\times n} = 1500.10^6 \Leftrightarrow 1,7\%.n = ln\frac{1500}{984} \Rightarrow n \approx 24,80$

Câu 13. Đáp án D

Ta có $\frac{I}{I_0} = 1000 = 10^3 \Rightarrow log\frac{I}{I_0} = 3 \Rightarrow L(dB) = 10og\frac{I}{I_0} = 30dB$

Câu 14. Đáp án A

Áp dụng công thức $P = P_0 e^{xi}$

Ở độ cao $1000m$ ta có : $P_0 = 760mmHg, n = 1000m, P = 672,71mmHg$, từ giả thiết này ta tìm được hệ số suy giảm i.

Ta có $672,71 = 760e^{1000 \times i} \Leftrightarrow 1000i = ln\dfrac{672,71}{760} \Leftrightarrow i \approx -0,00012$

Khi đó ở độ cao $3000m$, áp suất của không khí là:

$P = 760e^{-0,00012 \times 3000} \approx 530,2340078$

Câu 15. Đáp án B

[redacted]

Câu 16. Đáp án A

Áp dụng công thức $m(t) = m_o\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

Với $m_0 = 250, T = 24$ giờ = 1 ngày đêm, $t = 3,5$ ngày đêm.

Ta có $m(3,5) = 250\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3,5}{1}} \approx 22,097$ gam.

Câu 17. Đáp án C

[redacted]

Câu 18. Đáp án A

Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loài vi khuẩn này. Từ giả thiết

$300 = 100.e^{5r} \Leftrightarrow e^{5r} = 3 \Leftrightarrow 5r = ln3 \Leftrightarrow r = \dfrac{ln3}{5} \approx 0,2197$

Tức là tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là $21,97\%$ mỗi giờ.

Từ 100 con, để có 200 con thì thời gian cần thiết là bao nhiêu? Từ công thức

$200 = 100.e^{rt} \Leftrightarrow e^{rt} = 2 \Leftrightarrow rt = ln2 \Leftrightarrow t = \dfrac{ln2}{r} \Leftrightarrow t = \dfrac{ln2}{\frac{ln3}{5}} \approx 3,15$ (giờ) = 3 giờ 9 phút.

Câu 19. Đáp án B

- Trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richte khi đó áp dụng công thức $M_1 = \log A - \log A_0 \Rightarrow 8 = \log A - \log A_0$ với
- Trận động đất ở Nam Mỹ có biên độ là: $4A$, khi đó cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

$M_2 = \log(4A) - \log A_0 \Leftrightarrow M_2 = \log 4 + \log A - \log A_0 \Rightarrow M_2 = \log 4 + 8 \approx 8,6$ độ Richte

Câu 20. Đáp án D

Cách 1: Từ giả thiết và quan sát đồ thị ta có bảng sau

Thời điểm t (ngày)	Số lượng của đàn vi khuẩn
0	250
$\frac{1}{2}$	$500 = 250.2^{2.\frac{1}{2}}$
1	$100250.4 = 250.2^{2.1}$
$\frac{3}{2}$	$2000 = 250.8 = 250.2^{2.\frac{3}{2}}$

Từ đó ta thấy được công thức thể hiện sự tăng trưởng về số lượng của đàn vi khuẩn N tại thời điểm t có dạng: $N = 250.2^{2t}$.

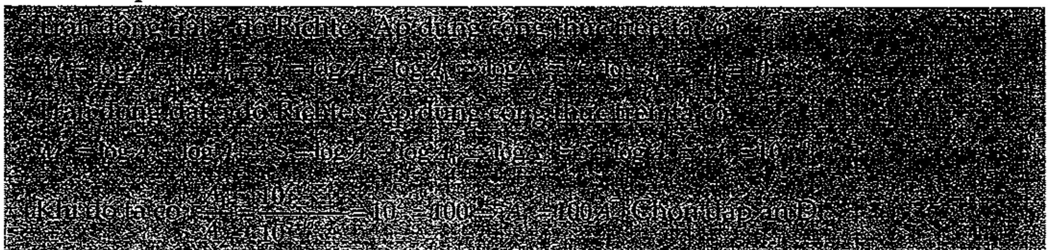
Cách 2:

Từ đồ thị ta thấy sau thời gian $t = 0,5$ ngày số lượng của đàn vi khuẩn là: 500 con.

Từ đồ thị ta thấy sau thời gian $t = 1$ ngày số lượng của đàn vi khuẩn là: 1000 con.

Từ đó thay $t = 1, t = 0,5$ lần lượt vào các công thức ở các đáp án A, B, C, D thì ta thấy chỉ có công thức ở đáp án D thoả mãn, từ đó suy ra chọn đáp án D.

Câu 21. Đáp án D


[redacted]

Câu 22. Đáp án A

Áp dụng công thức (2) $P_n = P_o\left(1+r\right)^n$

Giai đoạn 1: Gửi 100 triệu : Áp dụng công thức trên với $P_0 = 100, r = 6\% = 0.06; n = 4$.

Số tiền thu được sau 1 năm là: $P_4 = 100\left(1+0.06\right)^4$ triệu đồng.

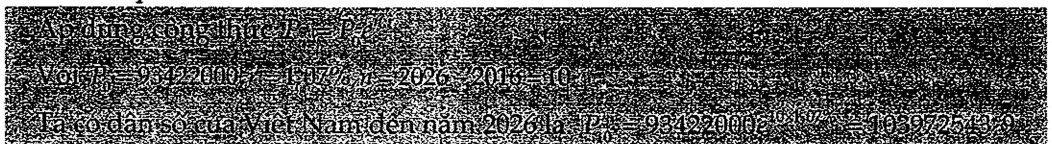
Giai đoạn 2: Sau đúng 6 tháng gửi thêm 100 triệu:

Áp dụng công thức trên với $P_0 = 100, r = 6\% = 0.06; n = 2$.

Số tiền thu được sau 2 quí cuối năm là: $P_2 = 100\left(1+0.06\right)^2$ triệu đồng.

Vậy tổng số tiền người đó thu được sau một năm là: $P = P_4 + P_0 = 238,307696$ triệu đồng

Câu 23. Đáp án A


[redacted]

Câu 24. Đáp án B

Áp dụng công thức $C = A\left(1+r\right)^N$ với $A = 20, r = 8,65\%, n = 3$ năm $= 12$ quí.

Vậy số tiền thu được sau 3 năm là: $C = 20\left(1+8,65\%\right)^{12} = 54,12361094$ triệu đồng.

Câu 25. Đáp án D

Dựa vào đồ thị, ta thấy cuối ngày thứ nhất lượng thuốc còn lại phải lớn hơn 30mg. Vậy thấy đáp án D thoả mãn.

Câu 26. Đáp án A

Theo câu 25 sau thời gian $t = 1$ ngày lượng thuốc còn lại là 32mg. Áp dụng công thức $y = 80r^t \Rightarrow 32 = 80r \Rightarrow r = 0,4 = 40\%$

Câu 27. Đáp án A

[redacted]

Gọi M_2 độ lớn của trận động đất tại thành phố Y, áp dụng công thức $log(E) = 11,4 + 1,5M$ ta được phương trình sau:

$log(E_2) = 11,4 + 1,5M_2 \Leftrightarrow log\left(\frac{10^{23,4}}{14}\right) = 11,4 + 1,5M_2 \Leftrightarrow M_2 \approx 7,2$ độ Richte

Câu 28. Đáp án A

[redacted]

Câu 29. Đáp án A

Áp dụng công thức lãi kép ta có số tiền cả vốn lẫn lãi người gửi sau n quý là

$P_n = 15(1 + 1,65\%)^n = 15.1,0165^n$ (triệu đồng)

Từ đó ta có : $n = log_{1,0165}\frac{P_n}{15}$

Để có số tiền $P_n = 20$ triệu đồng thì phải sau một thời gian là: $n = log_{1,0165}\frac{20}{15} \approx 17,58$ (quý)

Vậy sau khoảng 4 năm 6 tháng (4 năm 2 quý), người gửi sẽ có ít nhất 20 triệu đồng từ số vốn ban đầu 15 triệu đồng (vì hết quý thứ hai, người gửi mới được nhận lãi của quý đó.

Câu 30. Đáp án A

[redacted]

Câu 31. Đáp án A

Bài toán chia làm 2 giai đoạn

Giai đoạn 1 (6 tháng đầu tiên) **ta có:** $A_1 = 100$ (triệu đồng), $n = 2$ (6 tháng = 2 kỳ, với mỗi kỳ 3 tháng)và $r = 0,05$.

Áp dụng công thức $T_1 = A_1(1+r)^n = 100(1+0,05)^2 = 110.25$ (triệu đồng).

Giai đoạn 2 (6 tháng cuối của 1 năm) $A_2 = T_1 = 110,25 + 50$ (triệu đồng), $n = 2$ (6 tháng = 2 kỳ, với mỗi kỳ 3 tháng)và $r = 0,05$.

Áp dụng công thức $T_2 = A_2(1+r)^n = 160,25(1+0,05)^2 = 176,67$ (triệu đồng).

Câu 32. Đáp án A

[redacted]

Câu 33. Đáp án C

Ta có $M_{8,3} - M_{7,1} = \log\frac{A_{8,3}}{A_{7,1}} \Leftrightarrow \frac{A_{8,3}}{A_{7,1}} = 10^{8,3-7,1} \approx 15,8$

Câu 34. Đáp án A

Áp dụng công thức 5b: $x = \frac{a(1+r)^n.r}{(1+r)^n - 1} \Rightarrow x = \frac{16(1+1\%)^{24} \times 1\%}{(1+1\%)^{24} - 1} = 753175,5556$ (đồng)

Câu 35. Đáp án A

[redacted]

Câu 36. Đáp án A

Theo công thức tính tỉ lệ % thì cần tìm t thỏa mãn:

$75 - 20\ln(t+1) \le 10 \Leftrightarrow \ln(t+1) \ge 3,25 \Leftrightarrow t+1 \ge 25,79 \Rightarrow t \ge 24,79$

Câu 37. Đáp án A

Theo giả thiết ta phải tìm x thoả

$\frac{100}{1+49e^{-0,015x}} \ge 75 \Leftrightarrow 100 \ge 75 + 3675e^{-0,015x} \Leftrightarrow e^{-0,015x} \le \frac{1}{147}$

$\Leftrightarrow -0,015x \le \ln\frac{1}{147} \Rightarrow x \ge 332,6955058$

Câu 38. Đáp án C

[redacted]

Câu 39. Đáp án C

Áp dụng công thức lãi kép ta có số tiền cả vốn lẫn lãi người gửi sau n năm là:

$P_n = 100(1+5\%)^n = 100.(1,05)^n$ (triệu đồng)

Câu 40. Đáp án B

Áp dụng công thức (2) $P_n = P_0(1+r)^n$ với $P_0 = 100, r = 7\%, n = 2$.

Ta có tổng số tiền bà A thu được sau 2 năm gửi ngân hàng là:

$P_2 = 100(1+7\%)^2 = 114,49$ (triệu đồng)

Từ đó tính được số tiền lãi thu được sau 2 năm là:

$P_2 - P_0 = 114,49 - 100 = 14,49$ triệu đồng.

Câu 41. Đáp án A

Áp dụng công thức lãi kép ta có số tiền cả vốn lẫn lãi người gửi sau n năm là:

$P_n = 6(1+7,56\%)^n = 6.1,0756^n$ (triệu đồng)

Từ đó ta có : $n = log_{1,0756} \frac{P_n}{6}$

Để có số tiền $P_n = 12$ triệu đồng thì phải sau một thời gian là: $n = log_{1,0756} \frac{12}{6} \approx 9,5$ (năm)

Vậy sau 10 năm, người gửi sẽ có ít nhất 12 triệu đồng từ số vốn ban đầu 6 triệu đồng.

Câu 42. Đáp án D

Áp dụng công thức lãi kép ta có số tiền cả vốn lẫn lãi người gửi sau 5 năm là:

$P_5 = 15(1+7,56\%)^5 = 21,59$ (triệu đồng)

Câu 43. Đáp án B


[redacted]

Câu 44. Đáp án A

Áp dụng công thức 3: $P_n = a(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}$

với $a = 1, r = 1\%, n = 2$ năm 6 tháng $= 30$ tháng.

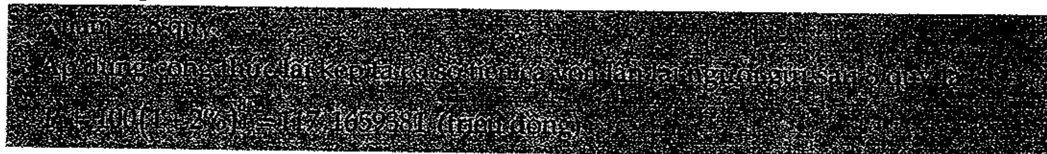
Từ đó suy ra số tiền rút được là: $P_{30} = 1(1+1\%)\frac{(1+1\%)^{30} - 1}{1\%} = 101\left[(1+1\%)^{30} - 1\right]$

Câu 45. Đáp án A

Áp dụng công thức 3: $P_n = a(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}$ với $a = 1, r = 1\%, n = 2$ năm 4 tháng $= 28$ tháng.

Từ đó suy ra số tiền rút được là: $P_{28} = 1(1+1\%)\frac{(1+1\%)^{28} - 1}{1\%} = 101\left[(1+1\%)^{28} - 1\right]$

Câu 46. Đáp án B


[redacted]

Câu 47. Đáp án C

Số vi khuẩn ban đầu có 1000 con và sau 10 giờ là 5000 con. Áp dụng công thức $f(t) = Ae^{rt}$, ta có: $5000 = 1000e^{10r} \Leftrightarrow e^{10r} = 5 \Leftrightarrow r = \frac{ln5}{10}$.

Gọi t là thời gian cần tìm để số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần.

Do đó, $10000 = 1000e^{rt} \Leftrightarrow e^{rt} = 10 \Leftrightarrow rt = ln10 \Leftrightarrow t = \frac{ln10}{r} \Leftrightarrow t = \frac{10ln10}{ln5} \Leftrightarrow t = 10log_5 10$ giờ nên **chọn câu C**.

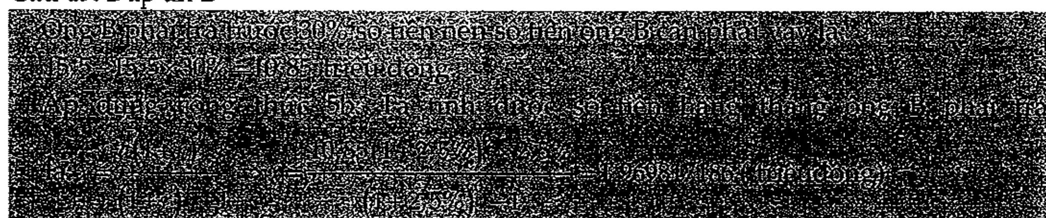
Câu 48. Đáp án D

Tỉ lệ lạm phát của nước ta trong năm 2016 là 2,5 %, nghĩa là cứ sau một năm giá sản phẩm B sẽ tăng thêm 2,5 % so với giá của sản phẩm đó ở năm trước. Ví dụ như giá xăng năm 2016 là 10.000 NDT/ lít thì giá xăng năm 2017 sẽ tăng thêm $10000 \times 2,5\% = 250$ NDT/ lít, khi đó giá xăng năm 2017 là: $10000 + 250 = 10250$ NDT/ lít

Để tính giá xăng năm 2025 , ta có thể áp dụng công thức (2) trong hình thức lãi kép $P_n = P_0(1+r)^n$ với $P_0 = 10000, r = 2,5\%, n = 2025 - 2016 = 9$

Ta có giá xăng năm 2025 là: $P_9 = 10000(1+2,5\%)^9 \approx 12489$ NDT/ lít

Câu 49. Đáp án D



Ông B phải trả trước 30% số tiền nên số tiền ông B cần phải vay là:
$15,5 - 15,5 \times 30\% = 10,85$ triệu đồng.
Áp dụng công thức 5b. Ta tính được số tiền hàng tháng ông B phải trả là: [illegible] $= 1,969817186$ (triệu đồng)

Từ đó ta tính được tổng số tiền ông B phải trả sau 6 tháng là:
$1,969817186 \times 6 = 11,81890312$ triệu đồng.

Vậy ông B mua theo hình thức trả góp như trên thì số tiền phải trả nhiều hơn so với giá niêm yết là: $11,81890312 - 10,85 = 0,9689031161$ triệu đồng ≈ 970000 đồng.

Câu 50. Đáp án A

- Áp dụng **công thức (5b)** cho: $a = 300, x = 5,5, r = 10,5\%, P_n = 0$. Tìm n?
- Từ**công thức (5b)** ta có:

[illegible]

$\Leftrightarrow n = \log_{1+0,5\%}\frac{5,5}{5,5 - 300 \times 0,5\%} \Leftrightarrow n \approx 63,84$

Ở đây ta thấy n không là số nguyên, lúc này ta có hai cách làm chọn

- Nếu chọn $n = 64$ (chọn số nguyên cao hơn gần nhất)

  Số tiền anh An còn nợ sau tháng thứ 63 là:

  $P_{63} = 300.(1+0,5\%)^{63} - 5,5.\frac{(1+0,5\%)^{63} - 1}{0,5\%} = 4,652610236$ (Lưu A máy tính casio)

  Số tiền anh An phải trả tháng cuối là: $A(1+0,5\%) = 4,678$ triệu.

- Nếu chọn $n = 63$ (chọn số nguyên nhỏ hơn gần nhất)

  Số tiền anh An còn nợ sau tháng thứ 63 là:

  $P_{62} = 300.(1+0,5\%)^{62} - 5,5.\frac{(1+0,5\%)^{62} - 1}{0,5\%} = 10,10209974$ (Lưu B máy tính casio)

  Số tiền anh An phải trả tháng cuối là: $B(1+0,5\%) = 10,1526$ triệu.

  Vì tháng cuối anh An phải trả số tiền nhỏ hơn 5,5 triệu đồng nên chọn phương án $n = 64$

CHƯƠNG III. KHỐI ĐA DIỆN - KHỐI TRÒN XOAY

Trong cuộc sống hằng ngày, chúng ta vẫn thường gặp những vật thể không gian như chiếc cốc, cây bút chì, chiếc nón lá, lon sữa, khối rubik, ... và việc nảy sinh những nhu cầu như đo đạc, phân tách, lắp ghép các vật thể là hoàn toàn tự nhiên. Trong chương này, chúng ta sẽ cùng dạo qua các bài toán hình học không gian nhưng không chỉ đơn thuần là giấy và bút, mà còn là cả một cuộc sống muôn màu mở ra trước mắt. Hy vọng kết thúc chương, các em sẽ thấy toán học gần gũi hơn ta tưởng rất nhiều.

Chương III của chúng ta sẽ bao gồm các nội dung chính như sau:

- ***Phần 1: Làm quen với các khối***
- ***Phần 2: Một số vấn đề định lượng***
- ***Bài tập trắc nghiệm***
- ***Đáp án và hướng dẫn giải***

PHẦN 1: LÀM QUEN VỚI CÁC KHỐI

Hình học không gian đến với chúng ta ngay từ những năm tháng đầu tiên của cuộc đời, và từ đó gắn chặt không rời cùng ta trong các hoạt động của cuộc sống. Đến đây, các bạn hẳn sẽ hồ nghi những điều mình vừa đọc, bởi lẽ trong trí nhớ của các bạn, những kiến thức về hình học không gian chỉ thực sự xuất hiện khi đi học: xuất phát từ việc làm quen với những hình khối đơn giản đến việc tìm hiểu những mối quan hệ trong không gian như song song, vuông góc về sau. Tuy nhiên, hãy bình tâm ngẫm lại một chút, có thực sự là chỉ khi đến trường các bạn mới được làm quen với những "hình hộp chữ nhật", "hình chóp" hay không?

Thuở chập chững biết đi, nói chưa tròn chữ, phiên bản "bé" của chúng ta đã vô cùng hứng thú với những món đồ chơi đầy màu sắc hình dáng "kì lạ", mò mẫm tìm cách leo được lên những bậc thang dù chưa được dạy. Lớn lên một chút, ta say mê với những món đồ chơi như ghép hình (xem hình 3.1.1.a) hay các khối rubik (xem hình 3.1.1.b), ý thức được rằng hoàn toàn có thể tung mình từ thềm nhà xuống đất nhưng sẽ chùn chân nhụt chí khi leo cầu thang lên máng trượt cảm giác mạnh ở công viên nước; hay trong hồ bơi thiếu nhi thì tung hoành vùng vẫy nhưng mỗi lần ra khu vực có tấm bảng "2m4" thì chỉ biết rùng mình đứng trên bờ và nhìn xuống đáy hồ và phần nào mường tượng được nó sâu và nguy hiểm như thế nào dù chưa một lần thực sự lặn xuống đó. Chưa hết, các bạn hẳn đã từng thắc mắc tại sao một số người chơi rubik kì cựu có thể chỉ sau một chút quan sát là có thể nhắm mắt và xoay khối rubik về ban đầu. Trí nhớ tốt hiển nhiên đóng vai trò then chốt, nhưng họ cũng cần hiểu rất rõ những hình khối đó để biết được từng mặt sẽ đi tới vị trí nào sau mỗi bước xoay của mình. Như vậy, trong suốt quá trình trưởng thành, ta học hỏi và dần chiếm lĩnh được không gian, cũng như phát triển trí tưởng tượng và khả năng sáng tạo của mình.



Hình 3.1.1.a



Hình 3.1.1.b

Trong phần 1 này, chúng ta sẽ tìm hiểu một số bài toán thú vị để làm quen với các khối trong không gian như: *Phân chia và lắp ghép các khối, Bản vẽ các khối* hay *Mô hình các khối* để từ đó dễ dàng tiếp cận với các chương về sau.

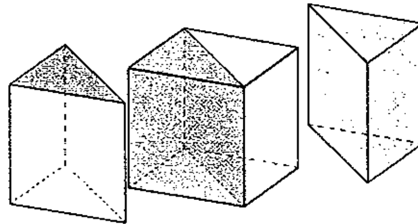
CHỦ ĐỀ 1: PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI

Những hình ảnh như một khối phô mai bị cắt hay những mẩu xếp hình được lắp ghép lại với nhau là các ví dụ sinh động cho việc phân chia và lắp ghép các khối trong không gian. (Hình 3.2.1)



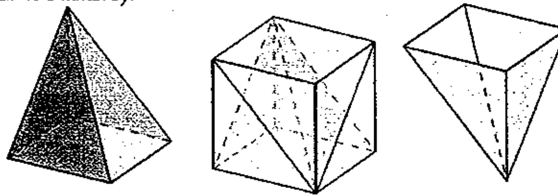
Hình 3.2.1

Việc phân chia và lắp ghép cũng cần tuân thủ một số nguyên tắc nhất định. Ví dụ cho trước một khối lập phương, ta có thể cắt khối này theo nhiều cách khác nhau, với mỗi cách cắt, ta tạo được một số khối đa diện mới, tạm gọi là **khối thành phần**, là một phần của khối lập phương ban đầu. Những khối thành phần tạo ra từ cùng một cách cắt hiển nhiên sẽ lắp ghép lại được thành khối lập phương ban đầu (3.2.2.a).

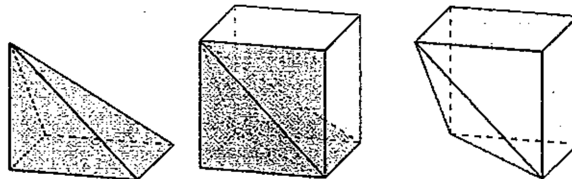


Hình 3.2.2.a

Tuy nhiên nếu chúng ta lấy một số khối thành phần từ những cách cắt khác nhau, chưa chắc ta đã có thể ghép chúng lại để tạo thành khối lập phương ban đầu: có thể chúng ta sẽ bị thiếu vài phần (xem hình 3.2.2.b), hoặc có khi lại bị thừa, chồng chất lên nhau (Xem hình 3.2.2.c).



Hình 3.2.2.b



Hình 3.2.2.c

Một hình *(H)* gọi là được phân chia thành các hình (H_1) và (H_2) hay nói cách khác, (H_1) và (H_2) có thể ghép lại tạo thành hình *(H)* nếu thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i. Hình *(H)* là hợp thành của (H_1) và (H_2). (các khối thành phần của hình 3.2.2.b rõ ràng không thỏa điều kiện này vì như ta thấy vẫn có thừa những khoảng trống khi ghép vào khối lập phương. Trong khi đó, các khối thành phần của hình 3.2.2.a và 3.2.2.c thỏa điều kiện)

ii. (H_1) và (H_2) không có điểm trong chung. (2 khối của hình 3.2.2.c không thỏa điều kiện này vì như ta thấy có một phần bị chồng lấp giữa 2 khối)

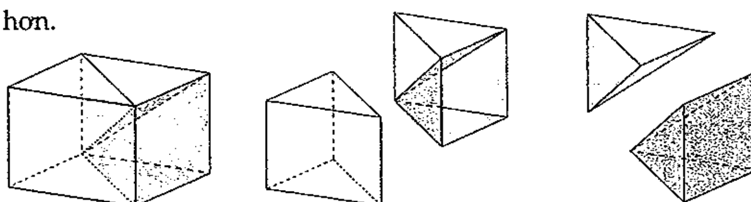
Ngoài hai nguyên tắc cơ bản trên thì để thực hiện tốt việc phân chia và lắp ghép các khối, ta cũng cần hiểu rõ về từng khối để có thể đưa ra những phỏng đoán, suy luận hợp lí.

KHỐI CHÓP			
Khối tứ diện	Khối tứ diện đều	Khối chóp tứ giác	Khối chóp tứ giác đều
Hình 3.2.3.a	*Hình 3.2.3.b*	*Hình 3.2.3.c*	*Hình 3.2.3.d*

KHỐI LĂNG TRỤ			
Khối lăng trụ tam giác	Khối lăng trụ đứng tam giác	Khối lăng trụ tứ giác	Khối lăng trụ đứng tứ giác
Hình 3.2.4.a	*Hình 3.2.4.b*	*Hình 3.2.4.c*	*Hình 3.2.4.d*
Khối hộp	Khối hộp đứng	Khối hộp chữ nhật	Khối lập phương
Hình 3.2.4.e	*Hình 3.2.4.f*	*Hình 3.2.4.g*	*Hình 3.2.4.h*

KHỐI TRÒN XOAY		
Khối nón	Khối trụ	Khối cầu
Hình 3.2.5.a	*Hình 3.2.5.b*	*Hình 3.2.5.c*

Tùy theo yêu cầu mà việc phân chia hay lắp ghép các khối sẽ có độ phức tạp khác nhau. Đối với những khối phức tạp, ta ***không*** nên cố gắng biểu diễn mọi thứ trên cùng một hình mà nên chia ra nhiều bước (Hình 3.2.6) hoặc xoay lật hình để có góc nhìn tốt hơn.



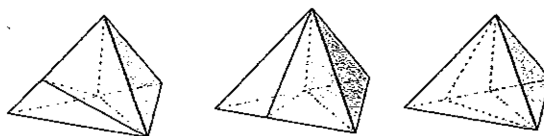
Hình 3.2.6

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3.1. Phân chia một khối tứ diện thành 3 khối tứ diện.

- Nhận xét: chỉ cần chọn một mặt tùy ý của tứ diện ban đầu, chia mặt này thành 2 tam giác là ta sẽ luôn phân chia được tứ diện đề cho thành 2 tứ diện mới.
- Sau đó, chọn một trong 2 tứ diện vừa tạo thành, lặp lại quá trình trên.

Hướng dẫn giải



Hình 3.3.1

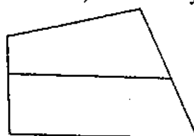
Bài tập tương tự

Bài 3.2. Phân chia một khối tứ diện thành 2 khối tứ diện và một khối chóp tứ giác có đáy là hình thang.

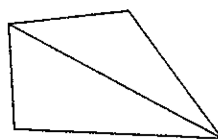
Bài 3.3. Phân chia một khối tứ diện thành 2 khối tứ diện và 2 khối chóp cụt.

Bài 3.4. Phân chia một khối chóp tứ giác thành 4 khối tứ diện bằng 2 mặt phẳng.

- Với việc phân chia đáy của khối chóp này thành 2 phần, ta sẽ định hình được 2 khối chóp mới (Hình 3.3.2). Lúc này, xem như ta đã cắt khối chóp đề cho một lần.



Hình 3.3.2.a



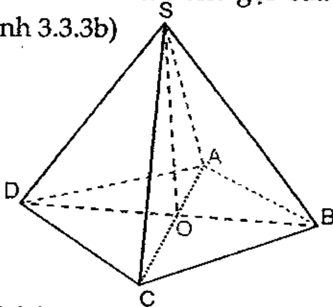
Hình 3.3.2.b

• Như vậy, ta nhận xét để tạo được 4 khối tứ diện, đồng nghĩa với việc đáy của chúng là các tam giác, ta nên chọn phương án ở hình 3.3.2.b vì lúc này chỉ việc chia đáy một lần nữa theo đường chéo còn lại của tứ giác là đáy sẽ được chia thành 4 tam giác. Ở đây, ta không chọn phương án ở hình 3.3.2.a không phải vì không thể tiếp tục chia thành 4 tam giác mà là vì số bước thực hiện sẽ nhiều hơn, trong khi ở đây theo như đề bài, số lần cắt của ta chỉ giới hạn trong 2 lần.

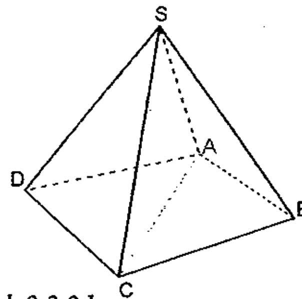
Hướng dẫn giải

Bước 1: Dựng khối chóp tứ giác S.ABCD, mặt phẳng (SAC) chia khối chóp này thành 2 khối tứ diện S.ABC và SABD. (Hình 3.3.3a)

Bước 2: Mặt phẳng (SBD) chia tiếp khối chóp thành 4 khối tứ diện. Nếu gọi O là giao điểm của AC và BD thì tên gọi của 4 khối tứ diện là: S.AOB, S.BOC, S.COD, S.DOA. (Hình 3.3.3b)



Hình 3.3.3.a



Hình 3.3.3.b

Bài tập tương tự

Bài 3.5. Phân chia một khối bát diện đều thành 4 khối tứ diện chỉ bằng 2 mặt phẳng.

Bài 3.6. Phân chia một khối chóp tứ giác thành 4 khối chóp tứ giác chỉ bằng 2 mặt phẳng.

Bài 3.7. Phân chia một khối tứ diện thành 4 khối tứ diện chỉ bằng 2 mặt phẳng.

Bài 3.8. Phân chia một khối tứ diện thành hai khối tứ diện và một khối chóp cụt.

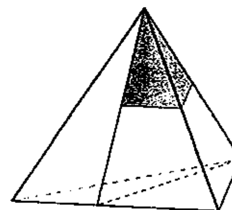
■ **Phân tích bài toán**

[redacted]

Hướng dẫn giải

Bước 1: Chia khối tứ diện thành 2 khối tứ diện.

Bước 2: Chọn 1 trong 2 khối tứ diện vừa tạo, cắt khối này bằng một mặt phẳng song song với một đáy, ta được một khối chóp cụt và một khối tứ diện nhỏ hơn. (Hình 3.3.4)



Hình 3.3.4

Bài tập tương tự

Bài 3.9. Phân chia một khối chóp cụt tam giác thành 3 khối tứ diện.

Bài 3.10. Phân chia một khối chóp cụt tam giác thành 6 khối tứ diện.

Bài 3.11. Phân chia một khối lập phương thành 4 khối chóp.

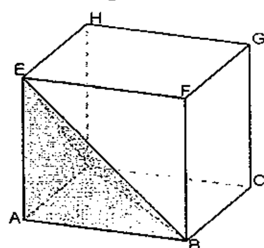
- Nhận xét: bằng cách chia khối lập phương theo mặt phẳng đối xứng của nó, ta được 2 khối lăng trụ tam giác. Với mỗi khối lăng trụ này, ta có thể chia tiếp thành 2 khối chóp.
- Như vậy, chỉ cần xử lý một khối lăng trụ và làm tương tự cho khối còn lại, ta sẽ có kết quả mong muốn.

Hướng dẫn giải

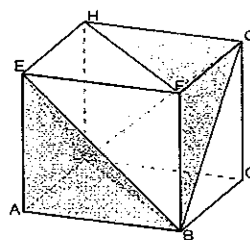
Bước 1: Chia khối lập phương dọc theo mặt đối xứng của nó là (HFBD), ta được 2 nửa của khối lập phương là 2 khối lăng trụ tam giác bằng nhau. Ở đây ta sẽ xử lý khối ABD.EFH.

Bước 2: Chia khối lăng trụ ABD.EFH thành khối tứ diện EABD và khối chóp tứ giác E.BDHF. (Hình 3.3.5.a)

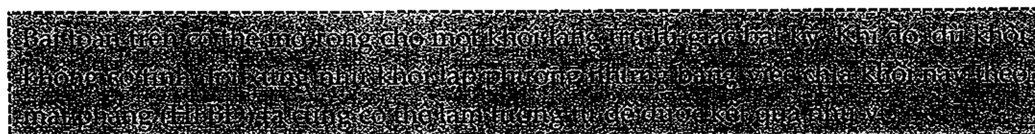
Bước 3: Làm tương tự với khối lăng trụ BCD.HGF. (Hình 3.3.5.b)



Hình 3.3.5.a



Hình 3.3.5.b


Bài toán trên có thể mở rộng cho một khối lăng trụ tứ giác bất kỳ. Khi đó dù khối không có tính đối xứng như khối lập phương nhưng bằng việc chia khối này theo mặt phẳng (HFBD) ta cũng có thể làm tương tự để được kết quả như vậy.

Bài tập tương tự

Bài 3.12. Phân chia một khối hộp thành 6 khối tứ diện.

Bài 3.13. Phân chia một khối hộp thành 6 khối chóp tứ giác.

Bài 3.14. Phân chia một khối hộp thành 5 khối tứ diện.

CHỦ ĐỀ 2: BẢN VẼ CÁC KHỐI

Các khối là các vật thể trong không gian với kích thước bao gồm chiều dài, chiều rộng và chiều cao nhưng khi cần mô tả hình dạng của một khối, ta chỉ có thể biểu diễn trên giấy, hay nói cách khác là trên một mặt phẳng. Những hình ảnh biểu diễn đó thực chất chỉ là các hình chiếu song song của vật thể lên giấy.

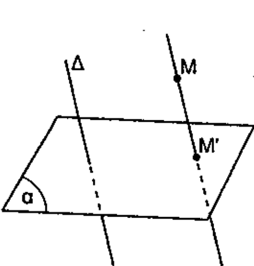
Hình chiếu song song của một vật lên một mặt phẳng là gì? Trước hết ta nhắc lại định nghĩa của phép chiếu song song trong không gian.

Cho một mặt phẳng (α) và một đường thẳng (Δ) cắt (α). Qua điểm M bất kỳ, ta vẽ đường thẳng d song song hoặc trùng với (Δ) và cắt (α) tại M'.

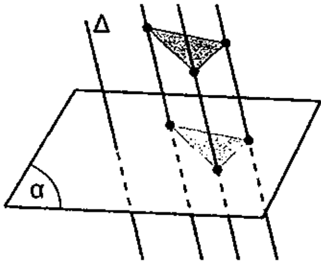
Khi đó M' gọi là hình chiếu của M lên mặt phẳng (α) theo phương (Δ). Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu, phương của (Δ) gọi là phương chiếu. (xem hình 3.4.1.a)

Tương tự, hình chiếu của hình *(H)* lên mặt phẳng (α) theo phương (Δ) là tập hợp các hình chiếu của các điểm thuộc hình (H) lên mặt phẳng (α) theo phương (Δ). (xem hình 3.4.1.b)

Khi đường thẳng (Δ) vuông góc với mặt phẳng (α), ta có phép chiếu vuông góc.



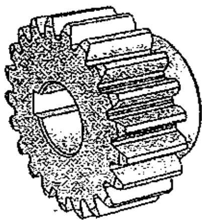
Hình 3.4.1.a



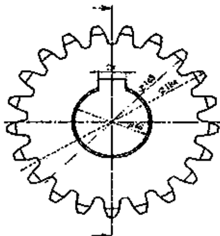
Hình 3.4.1.b

Hình chiếu tạo ra từ phép chiếu vuông góc gọi là hình chiếu vuông góc (hay còn gọi tắt là hình chiếu).

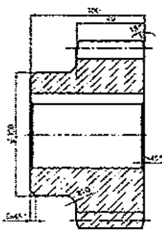
Như đã nói, các hình biểu diễn của các vật thể trong không gian lên giấy thực chất là các hình chiếu song song của vật thể theo một phương chiếu nào đó. Trong thực tế, ta rất hay sử dụng phép chiếu vuông góc để vẽ các hình biểu diễn của vật như trong các bản vẽ kỹ thuật chẳng hạn. Trong hình 3.4.2.a, ta có một thiết bị máy (hình ở góc dưới bên trái) được quan sát trực diện và quan sát từ một bên. Hai hướng nhìn khác nhau tương ứng với 2 phương chiếu khác nhau, từ đó ta có 2 hình chiếu như trong bản vẽ (hình 3.4.2.b và 3.4.2.c)



Hình 3.4.2.a



Hình 3.4.2.b



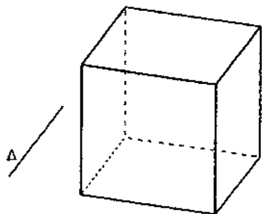
Hình 3.4.2.c

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

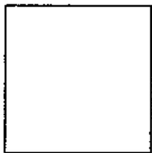
Bài 1: Hãy vẽ hình chiếu vuông góc của khối lập phương với phương chiếu là phương của một cạnh khối này.

Hướng dẫn giải

- Khi phương chiếu là phương của một cạnh, đồng nghĩa với việc phương chiếu sẽ vuông góc với một mặt của khối lập phương. Hình chiếu được yêu cầu vẽ là hình chiếu vuông góc, do đó mặt phẳng chiếu cũng song song với mặt của khối lập phương vừa nêu.
- Hình chiếu ta thu được sẽ là hình vuông và là một mặt của khối lập phương.



Hình 3.5.1.a



Hình 3.5.1.b: Hình chiếu của khối lập phương

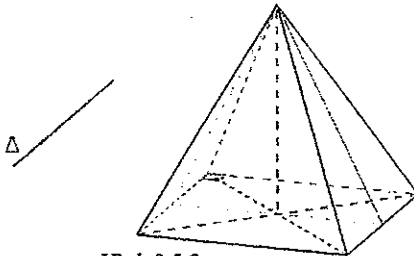
Dựa vào mô tả về phương chiếu của đề bài để xác định hình chiếu, thông thường phương chiếu sẽ là phương vuông góc với một mặt nào đó của vật.

Bài 3.16. Vẽ hình chiếu vuông góc của khối chóp tứ giác đều với phương chiếu trùng với phương của một cạnh đáy.

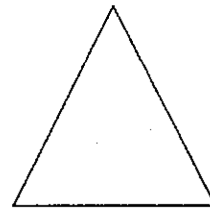
- Mặt phẳng chiếu sẽ là mặt phẳng vuông góc với cạnh đáy được chọn.
- Dựng đường cao của khối chóp, qua đó dựng mặt phẳng vuông góc với phương chiếu. Thiết diện của khối chóp khi bị cắt bởi mặt phẳng này cũng chính là hình chiếu ta cần vẽ.

Hướng dẫn giải

Hình chiếu của khối chóp tứ giác đều là một tam giác cân tại đỉnh của khối chóp.



Hình 3.5.2.a



Hình 3.5.2.b: Hình chiếu của khối chóp

Bài tập tương tự

Bài 3.17. Vẽ hình chiếu vuông góc của khối chóp tứ giác đều với phương chiếu trùng với phương của đường cao.

Bài 3.18. Vẽ hình chiếu vuông góc của khối tứ diện đều với phương chiếu trùng với phương của đường cao.

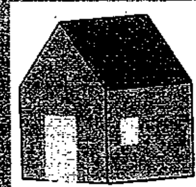
Bài 3.19. Vẽ hình chiếu vuông góc của một khối hộp đứng có đáy là hình thoi với phương chiếu trùng với phương của một đường chéo của đáy.

Bài 3.20. Cho một ngôi nhà có dạng hình lăng trụ ngũ giác đứng như hình vẽ. Vẽ hình chiếu vuông góc của ngôi nhà với phương chiếu:

a. Vuông góc với mặt có cửa ra vào

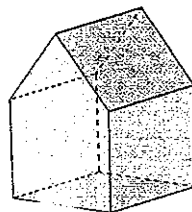
b. Vuông góc với mặt có cửa sổ

c. Vuông góc với sàn nhà



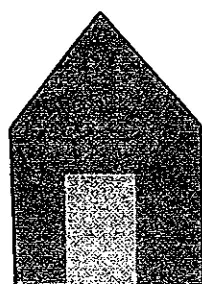
Hình 3.5.3.a

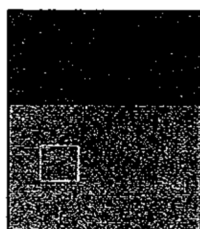
- Nắm rõ được cấu trúc của ngôi nhà, ta có thể xác định được hình chiếu trong từng trường hợp.



Hình 3.5.3.b

Hướng dẫn giải


Hình 3.5.3.c: câu a


Hình 3.5.3.d: câu b


Hình 3.5.3.e: câu c

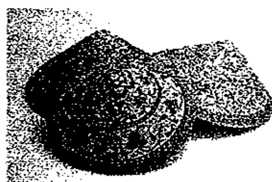
Bài tập tương tự

Bài 3.21. Vẽ hình chiếu vuông góc của một chiếc lọ có dạng hình trụ với phương chiếu vuông góc với đường cao.

Bài 3.22. Vẽ hình chiếu vuông góc của một chiếc nón có dạng hình nón khi phương chiếu trùng với phương của đường cao.

Bài 3.23. Vẽ hình chiếu vuông góc của một chiếc cốc có dạng hình nón cụt (đáy nhỏ nằm trên đáy dưới) khi phương chiếu trùng với phương của đường cao.


Hình 3.5.4


Hình 3.5.5


Hình 3.5.6

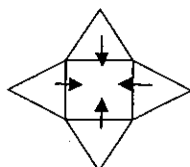
Bài 3.24. Một mẩu ghép hình có dạng hình lập phương và các nút dạng trụ nằm trên một mặt của khối (xem hình 3.5.7). Hãy vẽ hình chiếu vuông góc của mẩu ghép hình này khi phương chiếu vuông góc với một mặt của nó.

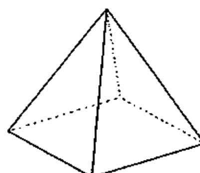

Hình 3.5.7

CHỦ ĐỀ 3: MÔ HÌNH CÁC KHỐI

Để mô tả một khối trong không gian, ngoài việc sử dụng các hình chiếu như đã nêu ở chủ đề 2, ta còn một phương án khác là dựng mô hình của các khối.

Đối với một khối đa diện, **lưới đa giác** của khối là tập hợp các đa giác tạo thành các mặt của khối được sắp xếp trong cùng một mặt phẳng sao cho có thể ghép lại tạo thành mô hình của khối đa diện ban đầu. (xem hình 3.6.1)

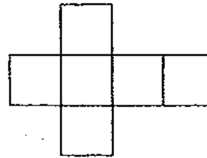

Hình 3.6.1.a: lưới đa giác của một khối chóp tứ giác đều


Hình 3.6.1.b: mô hình của một khối chóp tứ giác đều

Trong chủ đề 3 này, chúng ta sẽ làm quen với một số bài toán đơn giản trong việc tạo các lưới đa giác và lắp ghép mô hình các khối đa diện.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3.25. Nếu gấp hình dưới đây theo các đường kẻ, ta sẽ được mô hình của khối đa diện nào?

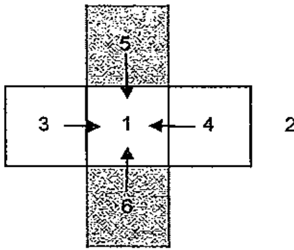


Hình 3.7.1.a

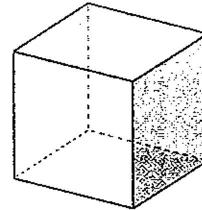
- Nhận xét: Khối đa diện này có tổng cộng 6 mặt là các hình vuông bằng nhau. Như vậy đây là một khối lập phương.

Hướng dẫn giải

Ghép theo hướng dẫn, các cặp mặt cùng màu sẽ đối nhau: 1-2, 3-4, 5-6.



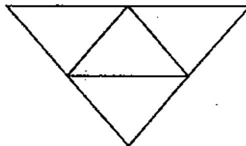
Hình 3.7.1.b



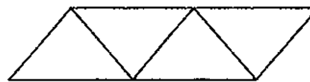
Hình 3.7.1.c

Bài tập tương tự

Bài 3.26. Nếu gấp các hình dưới đây theo các đường kẻ ta sẽ được mô hình khối đa diện nào?



Hình 3.7.2.a



Hình 3.7.2.b

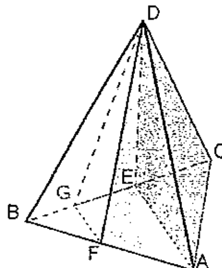
Bài 3.27. Vẽ một số mẫu lưới đa giác để dựng mô hình khối lập phương.

Bài 3.28. Vẽ một số mẫu lưới đa giác để dựng mô hình khối chóp tứ giác đều.

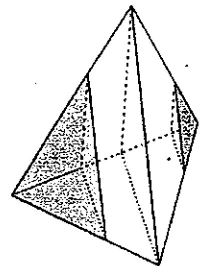
Bài 3.29. Vẽ một số mẫu lưới đa giác để gấp thành khối lăng trụ lục giác đều.

HƯỚNG DẪN GIẢI PHẦN 1

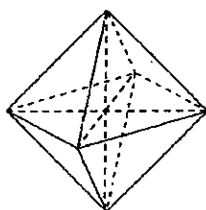
Bài 3.2.



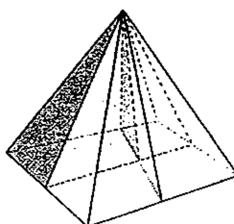
Bài 3.3.



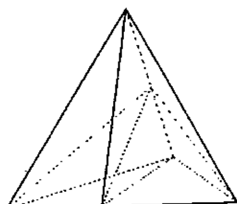
Bài 3.5.



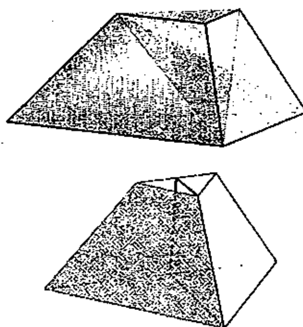
Bài 3.6.



Bài 3.7.



Bài 3.9



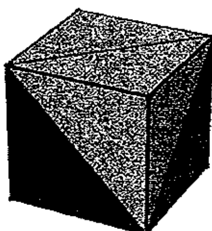
Bài 3.10.

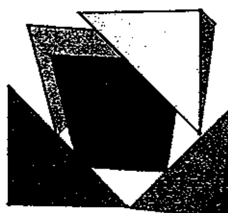
Chia khối chóp cụt thành 2 khối chóp cụt tam giác như hình bên. Mỗi hình chóp cụt mới tạo thành lại chia thành 3 khối tứ diện.

Bài 3.12. Tương tự bài 3.11, mỗi khối chóp tứ giác tạo ra lại tiếp tục chia thành 2 khối tứ diện.

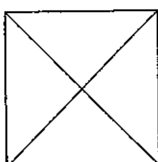
Bài 3.13. Lấy một điểm bất kì nằm bên trong khối hộp, ta sẽ có 6 khối chóp tứ giác với đáy là mặt bên của khối hộp và đỉnh là điểm vừa chọn.

Bài 3.14

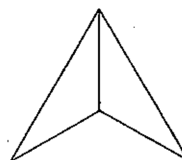




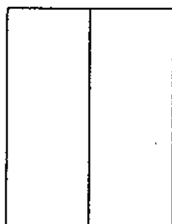
Bài 3.17.



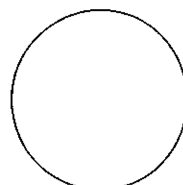
Bài 3.18.



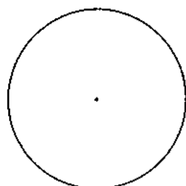
Bài 3.19.



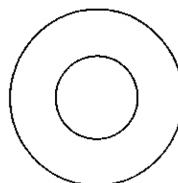
Bài 3.21.



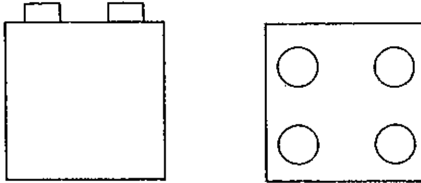
Bài 3.22.



Bài 3.23.

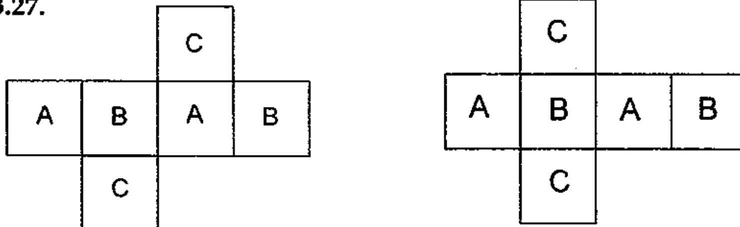


Bài 3.24.

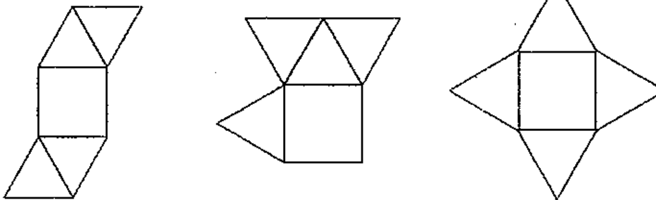


Bài 3.26. Khối tứ diện đều.

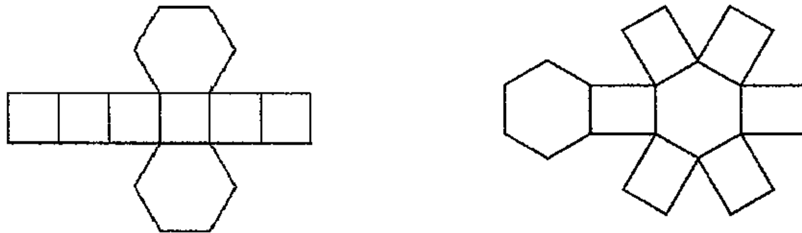
Bài 3.27.



Bài 3.28



Bài 3.29



PHẦN 2: MỘT SỐ VẤN ĐỀ ĐỊNH LƯỢNG

Từ phần 1, chúng ta đã được làm quen với các khối trong không gian qua những ví dụ cụ thể cũng như các hình ảnh của chúng trong cuộc sống. Việc nắm rõ tính chất của các khối cũng như hình dung được hình ảnh của khối từ các góc nhìn khác nhau là một trong những yếu tố quan trọng giúp cho việc định lượng các khối dễ dàng hơn. Nhưng tại sao ta cần phải định lượng chúng?

Hãy nhớ lại xem mỗi ngày khi ta rót nước vào một chiếc cốc, lúc đi mua một hộp sữa trong cửa hàng tiện lợi hay mua giấy gói một món quà, ... ta thường quan tâm đến điều gì? Hẳn suy nghĩ đầu tiên của chúng ta chính là liệu chúng có "vừa" không, có "phù hợp" với nhu cầu của ta hay không? Độ "vừa" hay "phù hợp" đó chính là nguyên nhân dẫn ta đến việc tìm hiểu thể tích hay diện tích xung quanh của một đồ vật. Vậy làm thế nào ta có được những thông tin này?

"Công cụ tìm kiếm Google" hẳn là câu trả lời được ưu tiên số một. Điều này hoàn toàn hợp lí, giữa thời đại của chúng ta, muốn biết dung tích của một hộp sữa ta có thể

đọc thông tin trên bao bì, muốn biết độ dày của một chiếc điện thoại ta hoàn toàn có thể tra cứu trên mạng, ... vậy vì lý gì phải mất công sức tìm hiểu những phương pháp tính toán trong những trang sách giáo khoa?



Hình 3.8.1

Bây giờ, hãy tạm gác cuốn sách qua một bên và xuống bếp nhé. Tưởng tượng bạn vừa pha xong một bình cà phê và muốn chia đều cho 2 tách. Chưa hết, vì mục đích thẩm mỹ, bạn còn muốn chọn chiếc tách sao cho khi mực nước càng gần miệng tách càng tốt, rõ ràng khi đó ta chẳng có thời gian tra cứu thông tin về kích thước của từng chiếc tách (ôi nhưng nếu như bạn có "điện thoại thông minh" ở đó thì chuyện này cũng khả thi đấy), cũng không thể thí nghiệm rót ra từng loại tách để kiểm chứng.

Như thế, đây là lúc mà những kỹ thuật tính toán, đo lường vào cuộc.
Trong phần 2 này, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu một số các bài toán liên quan đến việc định lượng các vật thể trong không gian, và sau khi kết thúc phần này, đặt quyển sách xuống và lướt qua chiếc tách bên cạnh mình, có khi vô tình bạn lại phán đoán gần đúng về các thông tin ẩn chứa đằng sau nó đấy.

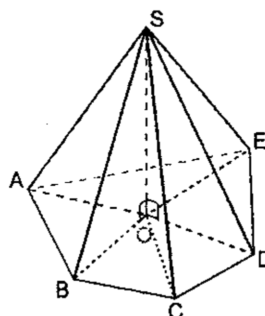
CHỦ ĐỀ 1: NHỮNG BÀI TOÁN VỀ KHỐI ĐA DIỆN

Để định lượng các khối đa diện, trước hết ta cần nhắc lại những kiến thức cơ bản về chúng.

1. Khối chóp

Cho khối chóp bất kì, gọi B là ***diện tích đáy*** của khối chóp và h là ***chiều cao*** khối chóp thì ***thể tích*** V của khối chóp được tính theo công thức:

$$V = \frac{1}{3}.B.h$$



Hình 3.9.1

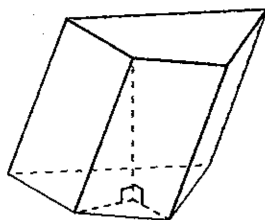
Diện tích xung quanh của một khối chóp bằng tổng diện tích các mặt bên (các mặt bên là các tam giác).

Diện tích toàn phần của một khối chóp bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy

2. Khối lăng trụ

Cho một khối lăng trụ bất kì, gọi B là ***diện tích đáy*** (diện tích đa giác màu xanh trong hình 3.9.2) và h là ***chiều cao*** (độ dài đoạn màu đỏ trong hình 3.9.2) của khối lăng trụ thì ***thể tích*** V được tính theo công thức:

$$V = B.h$$


Hình 3.9.2

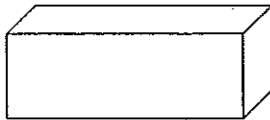
Diện tích xung quanh của một khối lăng trụ bằng tổng diện tích các mặt bên (các mặt bên là các hình bình hành).

Diện tích toàn phần của một khối lăng trụ bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

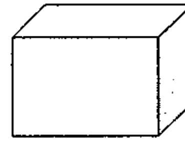
3. Khối hộp chữ nhật – Khối lập phương

Cho khối hộp chữ nhật có các kích thước (dài – rộng – cao) lần lượt là a, b, c thì thể tích V của khối hộp chữ nhật được tính theo công thức: $V = a.b.c$

Cho khối lập phương có độ dài cạnh là a thì thể tích V của khối lập phương được tính theo công thức: $V = a^3$.



Hình 3.9.3



Hình 3.9.4

BÀI TẬP RÈN LUYỆN



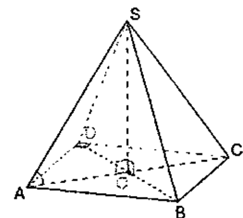
Bài 3.30. Kim tự tháp Kheops (hay còn gọi là Đại Kim tự tháp) là Kim tự tháp lớn nhất trong quần thể các Kim tự tháp Giza. Biết rằng Kim tự tháp có dạng là một khối chóp tứ giác đều với độ dài cạnh đáy bằng 230m và chiều cao ngày nay vào khoảng 140m. Tính thể tích của Kim tự tháp Kheops (Kết quả làm tròn tới hàng đơn vị).

Hình 3.10.1

- Công thức tính thể tích của khối chóp: $V = \frac{1}{3}.B.h$, trong đó V là thể tích khối chóp, B là diện tích đáy và h là chiều cao khối chóp
- Khối chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông.

Hướng dẫn giải

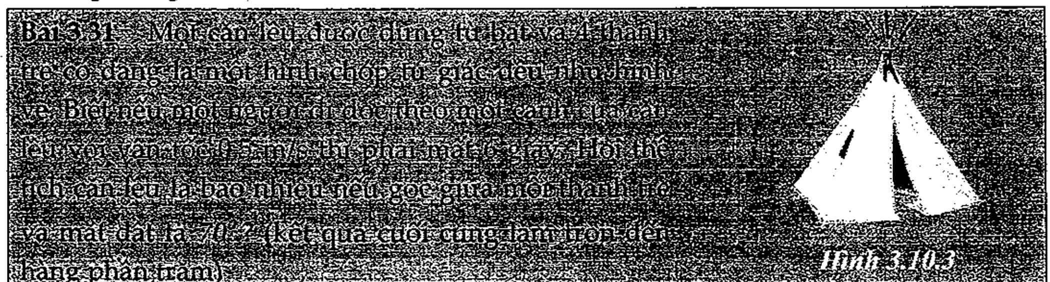
- Diện tích đáy của Kim tự tháp là diện tích của hình vuông có cạnh bằng 230m (do khối chóp là khối chóp tứ giác đều): $B = 230^2 = 52900\left(m^2\right)$



Hình 3.10.2

- Thể tích của Kim tự tháp Kheops:

$V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}.52900.140 \approx 2\ 468\ 667\ \left(m^3\right)$.



Bài 3.31. Một căn lều được dựng từ bạt và 4 thanh tre có dạng là một hình chóp tứ giác đều như hình vẽ. Biết nếu một người đi dọc theo một cạnh của căn lều với vận tốc 0,5 m/s thì phải mất 6 giây. Hỏi thể tích căn lều là bao nhiêu nếu góc giữa một thanh tre và mặt đất là $70,2^\circ$ (kết quả cuối cùng làm tròn đến hàng phần trăm)

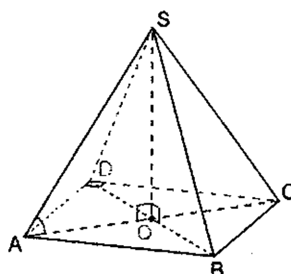
Hình 3.10.3

Để tính thể tích của căn lều hình chóp tứ giác này, ta cần tìm được diện tích đáy và chiều cao căn lều.

- **Diện tích đáy**: Thông tin một người đi dọc theo một cạnh căn lều với vận tốc 0,5m/s mất 6 giây cho ta biết độ dài cạnh của đáy. Từ đây, kết hợp với tính chất đáy là hình vuông, ta sẽ nhanh chóng tìm được diện tích đáy.
- **Chiều cao**: Với thông tin về góc giữa mỗi cạnh bên và đáy (tức góc giữa mỗi cây tre và mặt đất) cộng với độ dài cạnh đáy đã có từ bước 1, ta có thể tìm được chiều cao căn lều.

Hướng dẫn giải

Dựng mô hình của căn lều là khối chóp S.ABCD với S là đỉnh lều, các cạnh bên SA, SB, SC, SD là các thanh tre dùng để dựng lều.



- Một người đi dọc theo một cạnh đáy căn lều với vận tốc 0,5m/s trong vòng 6 giây, như vậy độ dài quãng đường người này đi được cũng chính là độ dài một cạnh căn lều: $P = 0{,}5.6 = 3\ (m)$

  Từ đây ta có diện tích đáy là $B = 3^2 = 9\ (m^2)$.

- Theo đề bài góc giữa các thanh tre và mặt đất là 70^o, và đó cũng chính là góc giữa mỗi cạnh bên và đáy. Đối với khối chóp đều vì góc giữa mỗi cạnh bên và đáy bằng nhau nên ta chỉ cần xét góc giữa một cạnh bên bất kỳ và đáy là đủ. Ở đây, ta xét góc giữa SA và đáy (ABCD).

  Góc giữa SA và đáy cũng là góc giữa SA và hình chiếu của nó lên đáy (ở đây chính là OA) là góc OAS. Xét tam giác OAS vuông tại O, ta có:

  $SO = OA.\tan\widehat{OAS} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}.\tan 70^o\ (m)$.

- Thể tích của căn lều, cũng là thể tích của khối chóp:

  $V = \dfrac{1}{3}B.h = \dfrac{1}{3}.9.\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\tan 70^o\right) \approx 17{,}48\ (m^3)$.

Trước khi giải quyết một số bài tập tương tự, ta hãy cùng hệ thống lại một số dạng bài toán có liên quan đến hình chóp đều.

Cho hình chóp đều có đáy là đa giác n cạnh, mỗi cạnh có độ dài là a. Hình chóp có chiều cao là h và độ dài các cạnh bên là b.

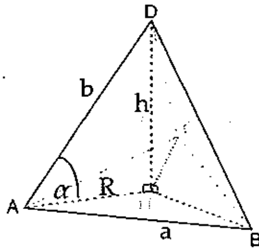
Như ta đã biết, hình chóp đều có đáy là đa giác đều và hình chiếu của đỉnh lên mặt đáy (hay chân đường cao) trùng với tâm của đa giác đáy. Vì thế chân đường cao của hình chóp đều vừa là tâm đường tròn ngoại tiếp vừa là tâm đường tròn nội tiếp của đa giác đáy. Từ đó dẫn đến trong một hình chóp đều, ta có 2 tính chất sau:

1) Các cạnh bên bằng nhau và bằng b.
2) Các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau (cạnh đáy là a).
3) Góc tạo bởi các cạnh bên và đáy bằng nhau và bằng α. (Hình 3.10.3.b)
4) Góc tạo bởi các mặt bên và đáy bằng nhau và bằng β. (Hình 3.10.3.c)

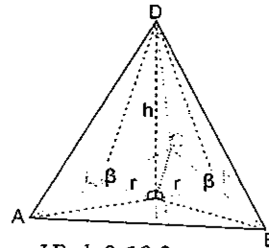
Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của đa giác đáy, ta có các hệ thức sau:

$$b^2 = h^2 + R^2$$
$$h = R.\tan\alpha$$

$$h^2 + r^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$h = r.\tan\beta$$



Hình 3.10.3.b



Hình 3.10.3.c

Đối với đa giác đáy, diện tích là S, ta có các hệ thức sau:

Trường hợp đáy là tam giác đều cạnh a.

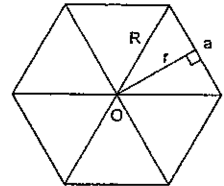
$R = \frac{\sqrt{3}}{3}a;\ r = \frac{\sqrt{3}}{6}a;\ S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$

Trường hợp đáy là hình vuông cạnh a.

$R = \frac{\sqrt{2}}{2}a;\ r = \frac{1}{2}a;\ S = a^2.$

Trường hợp đáy là đa giác đều n cạnh, độ dài cạnh là a.

$$R = \frac{a}{2\sin\left(\frac{180^o}{n}\right)};\ r = \frac{a}{2\tan\left(\frac{180^o}{n}\right)};\ S = \frac{nra}{2} = \frac{nR^2\sin\left(360^o/n\right)}{2}$$

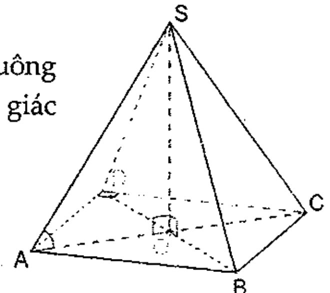


Hình 3.10.3.d

Bài 3.32. Kim tự tháp Kheops có dạng là một hình chóp tứ giác đều với độ dài cạnh đáy bằng 230m và chiều cao ban đầu vào khoảng 147m. Để xây dựng Kim tự tháp này người ta đã sử dụng 2 400 000 khối đá hình lập phương giống nhau. Giả sử toàn bộ số đá trên đã được đưa vào trong Kim tự tháp một cách trọn vẹn và xếp khít với nhau, hãy tìm độ dài cạnh của mỗi khối đá. (Kết quả cuối cùng làm tròn đến hàng phần trăm)

- Công thức tính thể tích của khối chóp: $V = \frac{1}{3}.B.h$, trong đó V là thể tích khối chóp, B là diện tích đáy và h là chiều cao khối chóp
- Khối chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông.
- Công thức tính thể tích khối lập phương: $V = a^3$ với a là độ dài cạnh của khối lập phương.
- Nhận xét: Thể tích của kim tự tháp bằng tổng thể tích của 2 400 000 khối đá.

Hướng dẫn giải



- Diện tích đáy của Kim tự tháp là diện tích của hình vuông có cạnh bằng 230m (do khối chóp là khối chóp tứ giác đều): $B = 230^2 = 52900\ \left(m^2\right)$
- Thể tích của Kim tự tháp Kheops:

$V_{KTT} = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}.52900.147 = 2592100\ \left(m^3\right).$

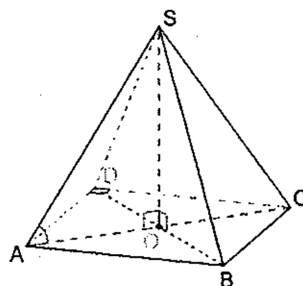
- Thể tích của một khối đá: $V_{khoi\ da} = \dfrac{V_{KTT}}{2\ 400\ 000} = \dfrac{2592100}{2400000} = \dfrac{25921}{24000}\ \left(m^3\right)$.
- Độ dài cạnh của khối đá bằng $\sqrt[3]{\dfrac{25921}{24000}} \approx 1{,}03\ (m)$.

Bài 3.33. Một căn lều được dựng từ bạt và 4 thanh tre có dạng là một hình chóp tứ giác đều. Biết góc giữa mỗi thanh tre và mặt đất là 75^o và thể tích căn lều là 21000 lít, hãy tính khoảng cách từ nóc lều đến mặt đất? (lấy $tan75^o = 2+\sqrt{3}$, kết quả cuối cùng làm tròn đến hàng phần trăm)

- Nhận xét: Trong công thức tính thể tích của khối chóp có 2 đại lượng chưa biết là chiều cao h của khối chóp và diện tích đáy B. Vì đáy là hình vuông nên diện tích đáy có thể biểu diễn theo độ dài cạnh đáy là a.
- Chi tiết góc giữa mỗi thanh tre (cũng là cạnh bên) và đáy cho ta mối liên hệ giữa cạnh đáy và chiều cao.
- Với thể tích khối chóp đã có, ta có thể giải phương trình để tìm ngược lại chiều cao h.

Hướng dẫn giải

Dựng mô hình của căn lều là khối chóp S.ABCD với S là đỉnh lều, các cạnh bên SA, SB, SC, SD là các thanh tre dùng để dựng lều. Gọi O là tâm của đáy, như vậy SO chính là đường cao của khối chóp.



- Gọi h (m) là chiều cao của khối chóp, suy ra SO = h.

  Gọi a (m) là độ dài cạnh của đáy thì: $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\ (m)$
- Góc giữa các cạnh bên và đáy cũng chính là góc OAS:

$$tan\widehat{OAS} = \frac{OS}{OA} = \frac{h}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}.tan75^o = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Suy ra $a = \dfrac{h\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}} = h\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$ và diện tích đáy là $a^2 = 2\left(7-4\sqrt{3}\right)h^2$.

- Với thể tích căn lều bằng 21.000 lít $= 21\left(m^3\right)$, ta tính được chiều cao căn lều:

$$V = \frac{1}{3}B.h \Leftrightarrow 21 = \frac{1}{3}.2\left(7-4\sqrt{3}\right)h^3$$

$$\Leftrightarrow h^3 = \frac{63\left(7+4\sqrt{3}\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow h \approx 7{,}60\ (m)$$

- Trong bài tập này, ta nhận thấy dù có nhiều đại lượng quan trọng cần dùng để tính toán thể tích như chiều cao hay độ dài cạnh đáy bị ẩn đi nhưng đề bài lại cho chúng ta những thông tin để thiết lập mối quan hệ giữa các đại lượng này (như thể tích hay số đo góc).
- Do đó, ta có thể đưa bài toán hình học về việc giải một hệ phương trình đại số để xử lý bài toán. Thông thường, đại lượng mà đề bài yêu cầu tìm kiếm chính là một trong các ẩn số trong hệ phương trình.
- Nhân đây ta cũng nhắc lại một số đơn vị đo thể tích quen thuộc:

  $1m^3 = 1000dm^3 = 1.000.000cm^3$

  1 lít = 1 dm^3; 1 ml = 1 cm^3

Bài tập tương tự

Bài 3.34. Một căn lều di động có dạng là hình chóp tứ giác đều với phần khung gồm 4 thanh kim loại có chiều dài $\sqrt{6}$ m. Người dùng có thể tùy ý điều chỉnh góc dựng của căn lều (góc giữa các thanh kim loại và mặt đất) tùy thích nhưng không thể thay đổi chiều dài của các thanh khung.

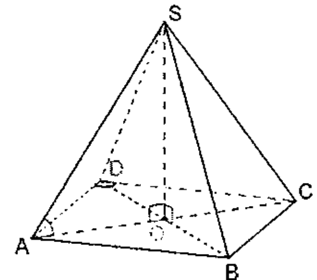
a. Hỏi khi thể tích của lều là $2\sqrt{3}\ m^3$ thì chiều cao của lều là bao nhiêu? (Chiều cao của lều là khoảng cách từ đỉnh lều đến mặt đất)

b. Nếu thay đổi góc giữa mỗi thanh khung và mặt đất từ 45^o lên 60^o thì tỉ số thể tích của căn lều trước và sau khi đổi góc dựng là bao nhiêu?

- Tương tự như bài tập 3.35, ở đây 2 đại lượng chưa biết mà ta sẽ sử dụng để tạo hệ phương trình sẽ là chiều cao khối chóp và độ dài cạnh đáy.

Hướng dẫn giải

a. Lần lượt gọi h (m) và a (m) là chiều cao và độ dài cạnh đáy của khối chóp. Tương tự như bài tập 3.35 ta có:



- Tam giác SOA vuông tại O:

$$SO^2 + OA^2 = SA^2 \Rightarrow h^2 + \frac{a^2}{2} = 6 \quad (1)$$

- Thể tích của khối chóp là $2\sqrt{3}\ m^3$:

$$V = \frac{1}{3}B.h \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{1}{3}.a^2.h$$

- Với h>0, ta có: $a^2 = \frac{6\sqrt{3}}{h}$, thay vào phương trình (1):

$$h^2 + \frac{3\sqrt{3}}{h} = 6 \Leftrightarrow h^3 - 6h + 3\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow h = \sqrt{3}\ hay\ h = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}\ hay\ h = \frac{-\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}$$

Nhận xét: Do h là chiều cao nên phải bé hơn độ dài của thanh kim loại (là cạnh bên). Vì vậy điều kiện của h là $0 < h < \sqrt{6}$.

Đối chiếu điều kiện, ta nhận 2 nghiệm là $h = \sqrt{3}$, $h = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}$.

b. Khi thay đổi góc giữa thanh khung và mặt đất, rõ ràng chiều cao và độ dài cạnh đáy của căn lều sẽ thay đổi, tuy nhiên có một đại lượng không đổi giá trị, chính là độ dài của cạnh bên (thanh khung).

Như vậy để biết thể tích căn lều thay đổi thế nào khi góc dựng tăng lên, ta chỉ việc biểu diễn thể tích theo góc dựng và độ dài thanh khung là được.

- Gọi α là góc dựng, ta có chiều cao căn lều $h = SA.sin\alpha = \sqrt{6}sin\alpha$ và độ dài $OA = h\,cos\alpha = \sqrt{6}\,cos\alpha$ suy ra độ dài cạnh đáy $a = OA\sqrt{2} = \sqrt{12}\,cos\alpha$.

Suy ra diện tích đáy là $B = a^2 = 12cos^2\alpha$.

- Vậy thể tích căn lều: $V = \frac{1}{3}.B.h = 4\sqrt{6}\,sin\alpha.cos^2\alpha$.

Gọi V_{45^o}, V_{60^o} lần lượt là thể tích của căn lều khi số đo góc dựng là.

Ta có: $\frac{V_{45^o}}{V_{60^o}} = \frac{4\sqrt{6}.sin45^o.cos^2 45^o}{4\sqrt{6}.sin60^o.cos^2 60^o} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Bài 3.35. Một căn lều có dạng hình chóp lục giác đều với phần khung gồm 6 thanh tre tạo với mặt đất một góc 60^0. Các mặt bên của lều được che kín bằng một lớp vải bạt, riêng một mặt được cắt một diện tích hình tam giác cân như hình bên để làm lối ra vào (hình 3.10.4) với đáy của tam giác cân này cũng là đáy của mặt lều được chọn. Biết thể tích của lều là $2m^3$ và diện tích cổng ra vào bằng 80% diện tích của mặt bên tương ứng, hỏi một người cao 1m75 có thể đi thẳng vào lều mà không cần khom người hay không?

• Hãy bắt đầu từ yêu cầu đề bài: liệu một người cao 1m75 có thể đi thẳng vào lều mà không cần khom người hay không? Để người đó đi thẳng được vào lều thì chiều cao của lối vào phải lớn hơn 1m75, và chiều cao đó chính là khoảng cách từ đỉnh của lối vào đến mặt đất.

Hình 3.10.4

• Để tính được khoảng cách này, ta xây dựng mô hình của căn lều, vốn là một khối chóp lục giác đều (xem hình 3.10.5.a) và H là đỉnh của lối vào. Dễ thấy cả đỉnh lều S và đỉnh lối vào H đều nằm trên đường cao đi qua điểm S của tam giác SBC và do đó sẽ cắt cạnh BC tại trung điểm M của BC.

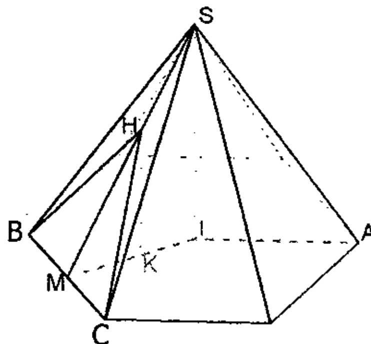
[redacted]

• Về tỉ số MS và MH, chắc chắn ta cần dùng đến thông tin "diện tích cổng ra vào bằng 80% diện tích của mặt bên".

Hướng dẫn giải

Dựng mô hình căn lều là một hình chóp lục giác đều có đỉnh là S, chiều cao SI.

Mặt bên của lều được chọn để tạo cổng ra vào là mặt (SBC) và cổng ra vào là tam giác HBC. Chiều cao của cổng là độ dài đoạn HK.



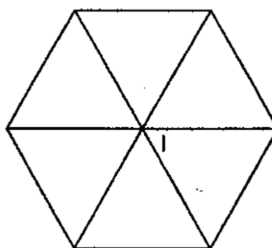
Hình 3.10.5.a

Chứng minh được SH cắt BC tại trung điểm M của BC.

Lần lượt gọi chiều cao của căn lều và độ dài cạnh đáy là h (m) và a (m).

<u>Nhận xét</u>: Đáy là một lục giác đều và có thể tách thành 6 tam giác đều có chung đỉnh I (xem hình 3.10.5.b), diện tích mỗi tam giác đều là $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(m^2\right)$.

Do vậy ta chứng minh được độ dài IA = a và diện tích của lục giác đều nói trên bằng $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\left(m^2\right)$.



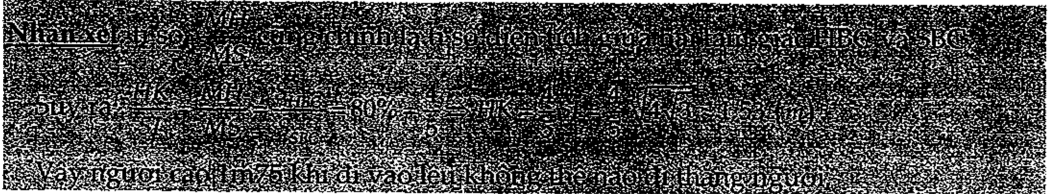
Hình 3.10.5.b

Góc giữa mỗi thanh tre và mặt đất cũng chính là góc giữa mỗi cạnh bên và đáy, hay nói cách khác là góc SAI: $tan\widehat{SAI} = \frac{SI}{AI} \Rightarrow tan60^o = \frac{h}{a} \Rightarrow a = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

Dựa vào công thức thể tích khối chóp, ta có:

$$V = \frac{1}{3}.B.h \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.h = \frac{\sqrt{3}}{6}.h^3 \Leftrightarrow h^3 = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{4\sqrt{3}}\ (m)$$

- Bây giờ, khi đã có chiều cao căn lều, ta tìm cách xác định tỉ số $\frac{MH}{MS}$.

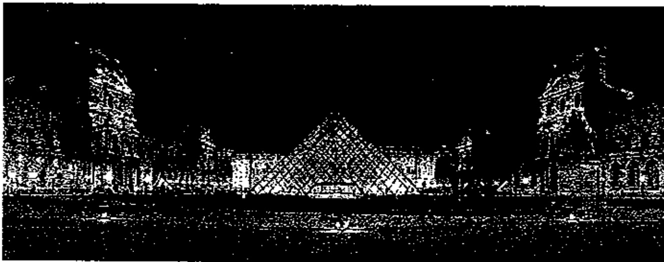

[redacted]

Bài 3.36. Kim tự tháp Louvre là một công trình kiến trúc tuyệt đẹp bằng kính tọa lạc ngay lối vào của Bảo tàng Louvre, Paris. Kim tự tháp có dạng là một hình chóp tứ giác đều với chiều cao 21m và độ dài cạnh đáy là 34m. Các mặt bên của kim tự tháp là các tam giác đều. (xem hình 3.10.6.a)

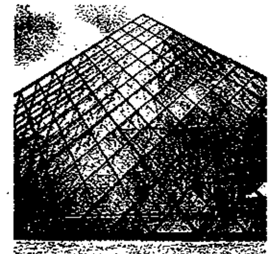
a. Tính thể tích của Kim tự tháp Louvre.

b. Tổng diện tích thật sự của sàn kim tự tháp là 1000 m^2, hỏi nếu sử dụng loại gạch hình vuông có độ dài cạnh là 60 cm để lót sàn thì cần bao nhiêu viên gạch?

c. Mỗi mặt của Kim tự tháp (trừ mặt có cổng ra vào) được tạo thành từ 18 tấm kính hình tam giác đều và 17 hàng kính hình thoi xếp chồng lên nhau (xem hình 3.10.6.b). Hỏi có bao nhiêu tấm kính hình thoi trên mỗi mặt?



Hình 3.10.6.a: Kim tự tháp Louvre.



Hình 3.10.6.b: Một mặt của Kim tự tháp Louvre.

- Câu a và b của bài toán không còn lạ lẫm gì với chúng ta, tuy nhiên câu c lại là một câu chuyện hoàn toàn khác.
- Hàng cuối cùng của mặt là 18 tấm kính tam giác đều, hàng tiếp theo là các tấm kính hình thoi và ta nhận xét được ngay hàng này có 17 tấm kính. Hàng kế tiếp có 16 tấm, sau đó là 15 tấm, ... và như vậy ta nhận ra quy luật: cứ lên cao 1 hàng thì số tấm kính hình thoi giảm đi 1 tấm. Như vậy tổng số tấm kính hình thoi là tổng từ 1 đến 17 (do có tổng cộng 17 hàng kính hình thoi)

Hướng dẫn giải

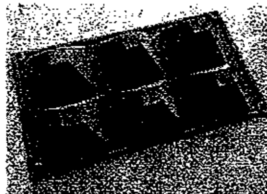
a. Thể tích kim tự tháp: $V = \frac{1}{3}.34^2.21 = 8092\ (m^3)$.

b. Diện tích một viên gạch hình vuông: $S = 0,6^2 = 0,36\ (m^2)$

Số viên gạch hình vuông cần dùng: $\frac{1000}{0,36}=2777,(7)\approx 2778$ (viên)

c. Số tấm kính hình thoi trên mỗi mặt: $\frac{17.(17+1)}{2}=153$ (tấm).

[redacted]



Hình 3.10.7.a: Khay đá có các ngăn có dạng hình chóp cụt

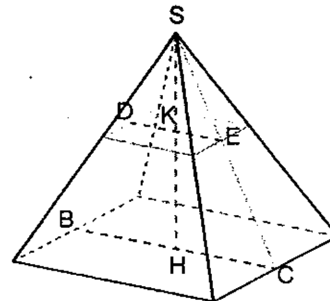
- Với thông tin về thể tích 6 ngăn, ta dễ dàng có được thể tích 1 ngăn, hay nói cách khác, thể tích 1 khối chóp cụt.
- Để tìm diện tích đáy nhỏ của từng ngăn, ta cần tìm độ dài cạnh của đáy nhỏ. Trước hết, ta cần tìm ra mối liên hệ giữa độ dài cạnh của 2 đáy và chiều cao khối chóp cụt.

[redacted]

- Dựng thiết diện của hình chóp chứa đường cao của hình chóp và song song với một cạnh của đáy, ta có thiết diện là tam giác màu xanh như hình vẽ. Áp dụng định lý Thales cho tam giác này, ta sẽ tìm ra được mối liên hệ giữa độ dài các cạnh đáy và chiều cao khối chóp cụt.

Hướng dẫn giải

Gọi K và H lần lượt là hình chiếu của S lên đáy nhỏ và đáy lớn. Dựng thiết diện chứa SH và song song với một cạnh đáy bất kì, ta được tam giác SBC màu xanh như trong hình với D, E lần lượt là 2 giao điểm của thiết diện trên với các cạnh của đáy nhỏ.



Gọi a, b (mm) lần lượt là độ dài các cạnh đáy lớn và đáy nhỏ. *Hình 3.10.7.b*

Gọi h', h (mm) lần lượt là chiều cao của hình chóp nhỏ và hình chóp lớn; k (mm) là chiều cao của khối chóp cụt.

Xét thể tích của ngăn nước đá (tức thể tích của khối chóp cụt):

$$V=V_{day\ lon}-V_{day\ nho}=\frac{1}{3}.a^2.h-\frac{1}{3}.b^2.h'=\frac{1}{3}\left[a^2(h'+k)-b^2.h'\right]=\frac{1}{3}\left[\left(a^2-b^2\right)h'+a^2.k\right]$$

Lại có: $\frac{h'}{h}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{h'}{k}=\frac{b}{a-b}\Rightarrow h'=\frac{b}{a-b}.k$, thay vào công thức tính thể tích ngăn nước:

$$V=\frac{1}{3}\left[\left(a^2-b^2\right).\frac{b}{a-b}.k+a^2.k\right]=\frac{1}{3}\left[b\left(a+b\right).k+a^2.k\right]=\frac{1}{3}.k.\left(a^2+ab+b^2\right)$$

Theo dữ kiện đề bài: a = 30mm; k = 25mm; $V=10ml=10.000\ \left(mm^3\right)$

$$10000=\frac{1}{3}.25.\left(30^2+30.b+b^2\right)\Leftrightarrow b^2+30b-300=0$$

$$\Leftrightarrow b=-15+5\sqrt{21}\ hay\ b=-15-5\sqrt{21}$$

Đối chiếu điều kiện, ta có độ dài cạnh đáy nhỏ sẽ là $-15+5\sqrt{21}\ \left(mm\right)$, và như vậy diện tích đáy nhỏ là: $\left(-15+5\sqrt{21}\right)^2\approx 62,61\ \left(mm^2\right)$

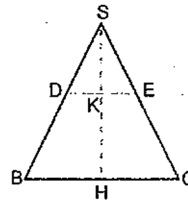
Bài 3.38. Một khay đá viên gồm 8 ngăn nhỏ có dạng là các hình chóp cụt với miệng và đáy là hình vuông (kích thước của miệng lớn hơn của đáy). Kích thước của khay đá (dài x rộng x cao) là 160 x 80 x 25 (đơn vị: mm), khoảng cách giữa các ngăn đá là không đáng kể. Biết góc giữa mặt bên của mỗi ngăn và mặt phẳng miệng là 80^o, hãy tính tổng thể tích của 8 ngăn đá? (lấy $tan80^o=\frac{17}{3}$ và kết quả cuối cùng làm tròn đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải

Đầu tiên, ta cần xác định những kích thước của ngăn đá mà ta đã biết. 8 ngăn đá viên chia thành 2 hàng sẽ tạo thành một hình chữ nhật có chiều rộng là 2 lần cạnh của ngăn đá và chiều dài là 4 lần cạnh ngăn đá (xem hình 3.10.8.a). Do đó ta tính được độ dài cạnh của ngăn đá là 40mm.



Hình 3.10.8.a



Hình 3.10.8.b

Ta dựng hình tương tự bài 3.39. Lúc này ta chứng minh được góc giữa mỗi mặt bên và miệng chính là góc SBC. Để dễ xử lý phần tính toán đối với tam giác SBC, ta sẽ chỉ xét đến mặt phẳng (SBC) (xem hình 3.10.8.b).

Xét tam giác SBC: $\frac{DE}{BC}=\frac{SK}{SH}=\frac{SH-KH}{SH}=\frac{BH.tan80^o-KH}{BH.tan80^o}$.

Thay BC = 40mm, KH = 25mm ta có:

$$\frac{DE}{40}=\frac{20.tan80^o-25}{20.tan80^o}\Rightarrow DE=\frac{40.tan80^o-50}{tan80^o}=\frac{530}{17}$$

Thể tích của một ngăn đá, cũng là thể tích của khối chóp cụt:

$$V=\frac{1}{3}.BC^2.SH-\frac{1}{3}.DE^2.SK$$

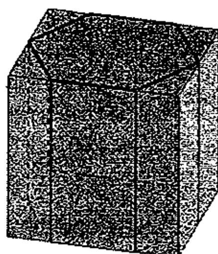
$$=\frac{1}{3}\left(40^2.20.tan80^o-\left(\frac{530}{17}\right)^2.\left(20.tan80^o-25\right)\right)\approx 31825,26\left(mm^3\right)=31,83\left(ml\right)$$

Tổng thể tích của khay đá: $8V=8.31,83=254,64\ \left(ml\right)$

Bài 3.39. Cho một cây nến hình lăng trụ lục giác đều. Biết chiều cao và độ dài cạnh đáy của cây nến lần lượt là 150 mm và 50 mm.
a. Người ta dùng một lớp giấy bao hình chữ nhật để quấn kín một vòng xung quanh thân nến. Tính diện tích của lớp giấy bao này.
b. Sau khi hoàn tất phần bọc thân nến, người ta xếp nến vào trong một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật (xem hình 3.10.10.b). Biết cây nến nằm vừa khít trong chiếc hộp, tìm các kích thước của chiếc hộp.



Hình 3.10.9.a



Hình 3.10.9.b

- Đối với câu a, ta nhận xét diện tích phần giấy bao xung quanh thân nến cũng chính là diện tích xung quanh của khối lăng trụ lục giác.
- Đối với câu b, ta cần tìm 3 kích thước dài, rộng, cao của chiếc hộp. Chiều cao chiếc hộp như ta thấy cũng là chiều cao cây nến. Để tìm chiều dài và chiều rộng ta chỉ cần giải quyết bài toán hình học phẳng trong mặt phẳng đáy là đủ.

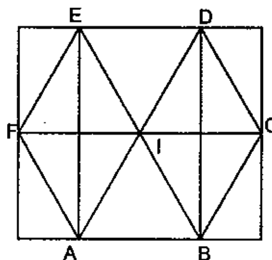
Hướng dẫn giải

[redacted]

Diện tích của lớp giấy bao cũng là diện tích xung quanh của khối lăng trụ lục giác, và bằng 6 lần diện tích một mặt bên của khối này: $6S = 450\ (cm^2)$.

b. <u>**Nhận xét**</u>: chiều cao của chiếc hộp cũng là chiều cao của cây nến hình lăng trụ và bằng 150mm.
Để tìm chiều dài và chiều rộng của chiếc hộp, ta chỉ cần xét trong mặt phẳng đáy của chiếc hộp, đồng thời là mặt đáy của cây nến hình lăng trụ. (xem hình 3.10.9.c)

Ta có hình ảnh của lục giác đều ABCDEF cạnh 50mm như trên hình vẽ. Ta nhận thấy 2 kích thước của đáy hộp cũng là độ dài các đoạn thẳng AE và CF.



Hình 3.10.9.c

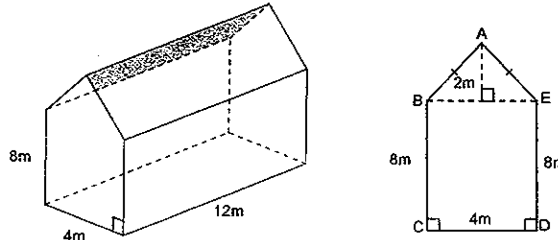
Đối với CF, ta có:
CF = CI + IF = 2ED = 2.50 = 100 (mm)
(Do ta có EDIF và EDCI là các hình bình hành nên CI = IF = ED)
Để tính độ dài AE, ta xét tam giác EAB vuông tại A:
$AE = \sqrt{EB^2 - AB^2} = \sqrt{4AB^2 - AB^2} = \sqrt{3}AB = 50\sqrt{3}\ (mm)$

Vậy kích thước của chiếc hộp (dài x rộng x cao) là $100mm \times 50\sqrt{3}mm \times 150mm$.

Bài 3.40. Một căn nhà có dạng là một hình lăng trụ ngũ giác đứng với các kích thước như hình vẽ (xem hình 3.10.10.a).

a. Hãy tính thể tích căn nhà.

b. Chủ nhà quyết định sơn tường quanh căn nhà (không tính phần mái và phần sàn nhà – những phần tô đậm) với mức giá 10.000 đồng/m^2. Hỏi người chủ nhà phải trả bao nhiêu tiền cho việc sơn nhà?



Hình 3.10.10.a

Hướng dẫn giải

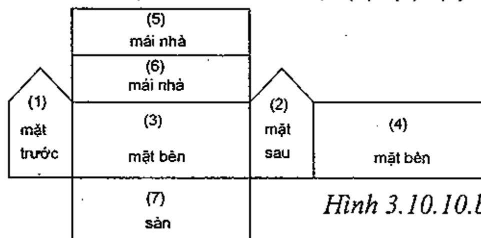
a. Nhận xét: chiều dài 12m của căn nhà chính là chiều cao của khối lăng trụ.

Xét mặt trước của căn nhà, cũng là ngũ giác ABCDE:

Diện tích ngũ giác ABCDE: $S_{ABCDE} = S_{BCDE} + S_{ABE} = 8.4 + \frac{1}{2}.4.2 = 36 \left(m^2\right)$.

Vậy thể tích căn nhà là: $V = B.h = S_{ABCDE}.h = 36.12 = 432 \left(m^3\right)$.

b. Nếu tạo mô hình của căn nhà, ta sẽ có được một lưới đa giác như hình 3.10.10.b. Phần diện tích được sơn là các mặt (1), (2), (3), (4).



Hình 3.10.10.b

Tổng diện tích 2 mặt (1), (2) bằng 2 lần diện tích ngũ giác ABCDE, tức 72 $\left(m^2\right)$.

Tổng diện tích 2 mặt (3) và (4): $2.8.12 = 192 \left(m^2\right)$.

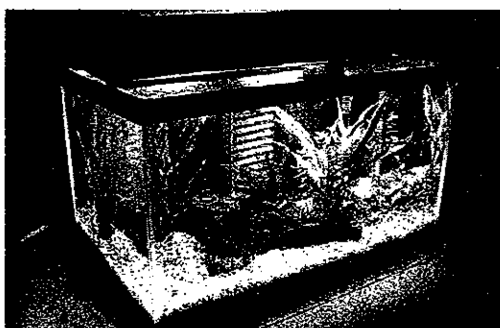
Tổng diện tích cần sơn: $72 + 192 = 264 \left(m^2\right)$.

Tổng chi phí cho việc sơn nhà: $264.10000 = 2\ 640\ 000$ (đồng).

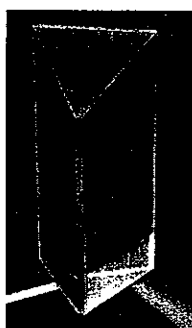
Bài 3.41. Một hồ cá có dạng là một hình hộp chữ nhật với các kích thước 60cm (dài) x 40 cm (rộng) x 50 cm (cao).

a. Người ta bơm nước vào hồ cá với lưu lượng 5 lít/phút. Hỏi mất bao lâu thì hồ cá đầy nước, biết rằng ban đầu trong hồ hoàn toàn trống rỗng?

b. Chủ hồ cá quyết định chỉ bơm nước đúng 15 phút thì dừng. Sau đó ông bắt đầu thả 3 lăng kính có dạng là các lăng trụ tam giác đều với chiều cao và độ dài cạnh đáy lần lượt là 7 cm và 3 cm chìm xuống đáy hồ. Hỏi mực nước cách miệng hồ bao nhiêu? (lấy $\sqrt{3} \approx 1,73$ và kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân)



Hình 3.10.11.a: hồ cá hình hộp chữ nhật.



Hình 3.10.11.b: Lăng kính lăng trụ tam giác

- Câu a: Để tính thời gian bơm nước đầy hồ, ta cần tìm dung tích của hồ, tức thể tích của khối hộp chữ nhật tương ứng.
- Câu b: Khi thả 3 khối lăng kính vào hồ thì tổng thể tích sẽ tăng lên dẫn đến sự thay đổi về chiều cao của mực nước.

Hướng dẫn giải

a. Dung tích V của hồ cá: $V = 60.40.50 = 120000\left(cm^3\right) = 120$ (lít).

Thời gian cần thiết để bơm nước đầy hồ: $\frac{120}{5} = 24$ (phút).

b. Thể tích nước trong hồ sau 15 phút bơm: $5.15 = 75$ (lít) $= 75000\left(cm^3\right)$.

Thể tích V' của một lăng kính dạng lăng trụ tam giác đều:

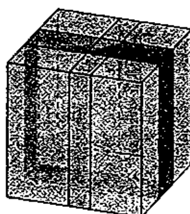
$V' = Bh = \left(3^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right).7 = 27,2475\left(cm^3\right)$.

Tổng thể tích lúc sau: $V + 3.V' = 75000 + 3.27,2475 = 75081,7425\left(cm^3\right)$.

Chiều cao mực nước lúc này: $\frac{75081,7425}{60.40} \approx 31,28\left(cm\right)$.

Khoảng cách từ mực nước đến miệng hồ: $50 - 31,28 = 18,72\left(cm\right)$.

Bài 3.42. Một hộp quà có dạng là khối lập phương cạnh 15 cm. Người ta dùng 2 dải băng để trang trí cho hộp quà bằng cách quấn mỗi dải một vòng quanh hộp quà theo phương án như hình 3.10.12, vị trí mối nối của dải băng sẽ được cố định bằng băng dính. Tính tổng độ dài của 2 dải băng.



Hình 3.10.12.

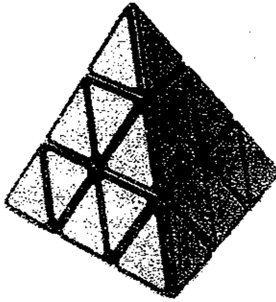
- Độ dài của mỗi dải băng chính là chu vi một mặt của khối lập phương.

Hướng dẫn giải

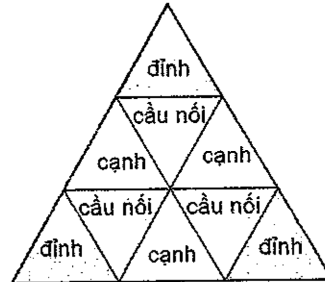
Độ dài của mỗi dải băng: 4.15 = 60 (cm).

Tổng độ dài của hai dải băng: 2.60 = 120 (cm).

Bài 3.43. Một khối Pyraminx (hay còn gọi là Rubik Kim tự tháp, hình 3.10.13.a) có cấu tạo tổng thể là một khối tứ diện đều, bao gồm 4 khối đỉnh có thể xoay độc lập, 6 khối cạnh trong đó mỗi khối có nhiệm vụ nối 2 đỉnh với nhau, và 4 khối cầu nối dùng để nối một khối đỉnh và các cạnh. Trong đó các khối đỉnh và cạnh là các tứ diện đều, khối cầu nối là bát diện đều có 3 mặt lộ ra ngoài (xem hình 3.10.13.b). Hỏi nếu thể tích của mỗi khối cầu nối là $6\sqrt{3}\ cm^3$ thì độ dài cạnh của khối Pyraminx là bao nhiêu?



Hình 3.10.13.a

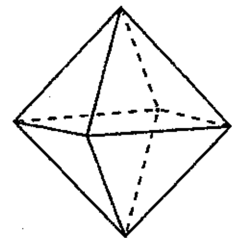


Hình 3.10.13.b

• Bài toán thoạt nhìn có vẻ rắc rối vì số lượng khối đa diện dùng để tạo thành khối Pyraminx là không ít, chưa kể cấu trúc bên trong tương đối phức tạp. Tuy nhiên ở đây ta nhận xét độ dài cạnh của các khối tứ diện thành phần và các khối bát diện đều là bằng nhau và bằng 1/3 độ dài cạnh của khối Pyraminx (hình 3.10.13.b).
• Do đó để tìm độ dài cạnh của khối Pyraminx ta chỉ việc tìm độ dài cạnh của khối cầu nối, tức khối bát diện đều.

Hướng dẫn giải

Đầu tiên ta cần nhớ lại cấu trúc của một khối bát diện đều. Khối bát diện đều có thể phân chia thành 2 khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau (hình 3.10.13.c). Do vậy, ta dễ dàng tìm được thể tích của mỗi khối chóp này và từ đó tìm ra độ dài cạnh.



Hình 3.10.13.c

Xét hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a (cm).

Suy ra: $OA = \frac{a}{\sqrt{2}}\ (cm) \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}\ (cm)$.

Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}\ (cm^3)$.

Theo đề bài $V_{S.ABCD} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{a^3}{3\sqrt{2}} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow a^3 = 9\sqrt{6} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{9\sqrt{6}}\ (cm)$.

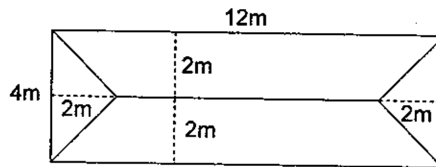
Suy ra độ dài cạnh của khối Pyraminx : $3a = 3.\sqrt[3]{9\sqrt{6}} \approx 8,41\ (cm)$.

Bài 3.44. Phần mái của một căn nhà có dạng là khối đa diện như hình vẽ (Hình 3.10.14.a). Bản vẽ hình chiếu của phần mái với phương chiếu vuông góc với sàn được cho ở hình 3.10.14.b. Biết chiều cao của phần mái là 160 cm.

a. Tính thể tích của phần mái nhà.

b. Tính góc giữa các mặt của mái nhà với sàn phần áp mái.





Hình 3.10.14.a *Hình 3.10.14.b*

Nhận xét khối đa diện của chúng ta không nằm trong số các khối chóp hay lăng trụ đã biết, như vậy để tính thể tích của khối này ta nên chia nó ra thành các khối quen thuộc.

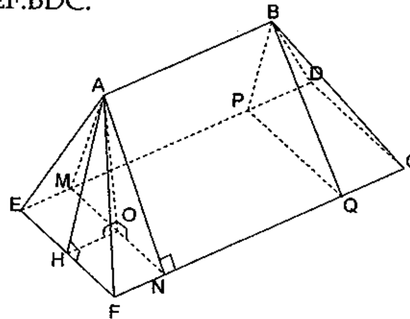
Hướng dẫn giải

a. Dựng mô hình của mái nhà là khối đa diện AEF.BDC.

Qua A dựng mặt phẳng vuông góc với (CDEF) và song song với EF, cắt ED và FC tại M và N.

Tương tự, dựng mặt phẳng qua B vuông góc với (CDEF) và song song với CD, cắt ED và FC tại P và Q.

Lúc này khối đa diện AEF.BDC được chia thành 2 khối chóp tứ giác bằng nhau là A.EFNM và B.PQCD, và một khối lăng trụ tam giác đứng AMN.BPQ. (hình 3.10.14.c)



Hình 3.10.14.c

- Dựa vào bản vẽ hình chiếu, ta xác định được các kích thước sau:
  CD = EF = 4 m; CF = ED = 12 m;
  EM = FN = DP = CQ = 2 m;
  AB = 12 – 2 – 2 = 8 m.

[redacted]

- Bây giờ, ta tìm thể tích khối lăng trụ tam giác đứng AMN.BPQ:

$V_{AMN.BPQ} = S_{AMN}.MP = \left(\frac{1}{2}.d(A,MN).MN\right).8 = 4.d\left[A;(FEDC)\right].MN = 4.1,6.4 = \frac{128}{5}\left(m^3\right)$ (trong đó do mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (FEDC), và MN là giao tuyến của 2 mặt phẳng này nên khoảng cách từ A đến MN cũng là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (FEDC)).

- Vậy thể tích phần mái nhà:

$$V_{FAE.CBD} = V_{AMN.BPQ} + V_{A.FEMN} + V_{B.CDPQ} = \frac{128}{5} + 2.\frac{64}{15} = \frac{512}{15}\left(m^3\right)$$

b. Kẻ AO vuông góc với MN tại O, suy ra AO vuông góc với mặt phẳng (FEDC).

- Góc giữa (AFE) và (FEDC):
  Kẻ $AH \perp FE$ tại H, ta có góc giữa 2 mặt phẳng (AFE) và (FEDC) chính là góc AHO.

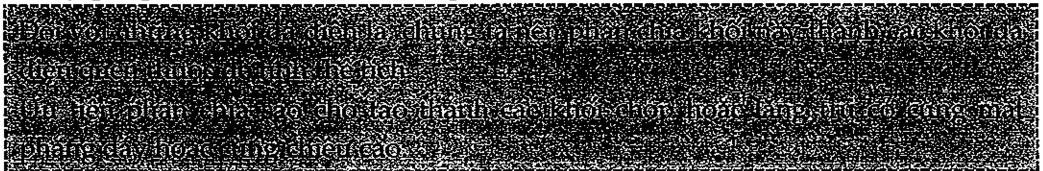
$tan\widehat{AHO} = \dfrac{AO}{OH} = \dfrac{1,6}{2} = 0,8 \Rightarrow \widehat{AHO} \approx 38^o40'$.

- Góc giữa (ABCF) và (FEDC):

  Góc giữa 2 mặt phẳng (ABCF) và (FEDC) chính là góc ANO.

  $tan\widehat{ANO} = \dfrac{AO}{ON} = \dfrac{1,6}{2} = 0,8 \Rightarrow \widehat{ANO} \approx 38^o40'$.

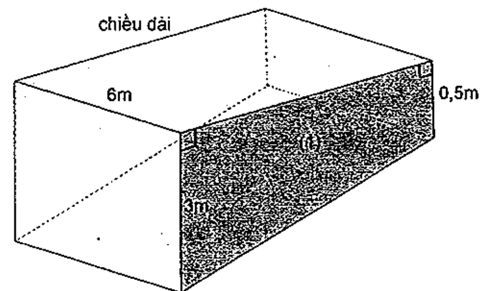
  Vậy góc giữa các mặt bên và sàn áp mái đều là $38^o40'$.


Đối với những khối đa diện lạ, chúng ta nên phân chia khối này thành các khối đa diện quen thuộc để tính thể tích.
Ưu tiên phân chia sao cho tạo thành các khối chóp hoặc lăng trụ có cùng mặt phẳng đáy hoặc cùng chiều cao.

Bài 3.45. Một hồ bơi có dạng là một hình lăng trụ tứ giác đứng với đáy là hình thang vuông (mặt bên (1) của hồ bơi là một đáy của lăng trụ) và các kích thước như đã cho (xem hình 3.10.15).

a. Biết rằng người ta dùng một máy bơm với lưu lượng $42\ m^3$/phút thì mất 25 phút là đầy hồ. Tính chiều dài của hồ.

b. Một người xuất phát từ thành hồ ở vị trí ứng với độ sâu 0,5m và bơi thẳng về phía cuối hồ với vận tốc 2m/s, hỏi sau 30 giây thì người này đang ở khu vực của hồ có độ sâu là bao nhiêu?



Hình 3.10.15.a

- Nhận xét: chiều rộng của hồ là chiều cao của khối lăng trụ, chiều dài của hồ là chiều cao của hình thang vuông của đáy lăng trụ. Vậy để tính chiều dài của hồ, trước hết ta cần tìm thể tích hồ rồi áp dụng công thức thể tích lăng trụ để truy ngược lại.
- Ở câu b, để xác định độ sâu, chỉ cần biết chính xác người này đã bơi bao xa, sau đó ta áp dụng định lý Thales.

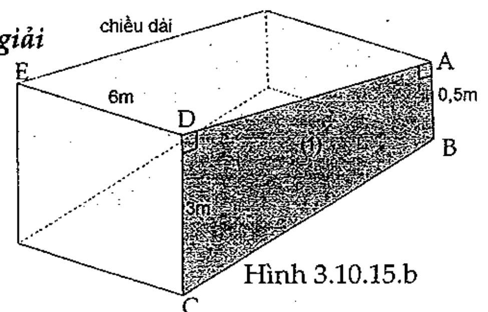
Hướng dẫn giải

a. Thể tích hồ bơi: $V = 42.25 = 1050\left(m^3\right)$.

Diện tích đáy của lăng trụ:

$S_{ABCD} = \dfrac{V}{DE} = \dfrac{1050}{6} = 175\left(cm^2\right)$.

Chiều dài của hồ bơi: $AD = \dfrac{2S_{ABCD}}{AB+CD} = 100(m)$

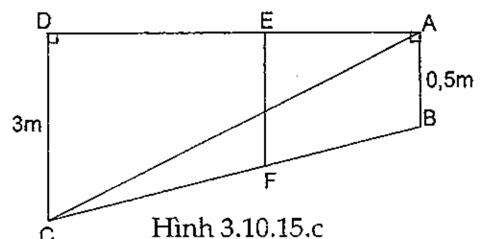


Hình 3.10.15.b

b. Quãng đường mà người đó đã bơi được: 2.30 = 60 (m).

Gọi E là điểm trên đoạn AD tương ứng với vị trí hiện tại của người này, qua E kẻ đường thẳng song song 2 đáy hình thang và cắt BC tại F. Độ sâu cần xác định chính là độ dài EF.

Áp dụng định lý Thales, ta dễ dàng có kết quả:



Hình 3.10.15.c

CHỦ ĐỀ 2: NHỮNG BÀI TOÁN VỀ KHỐI TRÒN XOAY

Trước hết, chúng ta nhắc lại một số kiến thức về các khối tròn xoay.

1. Khối nón

Cách tạo thành khối nón: xoay một tam giác vuông SOA (vuông tại O) một vòng quanh cạnh góc vuông SO của nó.

SO: đường cao, độ dài h của SO gọi là chiều cao.

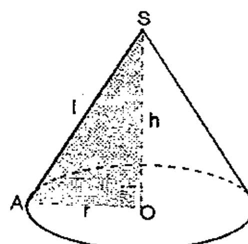
OA = r: bán kính đáy.

SA = l: đường sinh.

Thể tích V của khối nón:

$V = \frac{1}{3}.B.h = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h$

với B là diện tích hình tròn đáy.



Hình 3.11.1

Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi.r.l$

Diện tích toàn phần của một hình nón bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy:

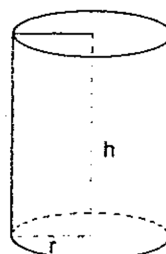
$S_{tp} = S_{xq} + B = \pi.r.l + \pi.r^2$

2. Khối trụ

Cách tạo thành khối trụ: xoay một hình chữ nhật quanh một cạnh h của nó.

h: chiều cao khối trụ.

r: bán kính đáy.



Hình 3.11.2

[redacted]

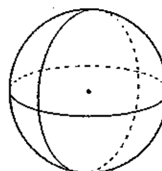
Diện tích toàn phần của một hình trụ bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy: $S_{tp} = S_{xq} + B = 2\pi r.h + 2\pi.r^2$

3. Khối cầu

Cho một khối cầu có bán kính r.

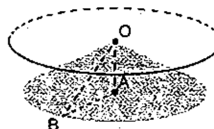
Thể tích V của khối cầu: $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$

Diện tích của mặt cầu: $S = 4\pi.r^2$


Hình 3.11.3

- Thiết diện của một khối cầu khi bị cắt bởi một mặt phẳng là một đường tròn. (hình 3.11.4)

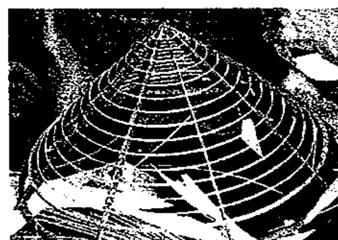
Đoạn nối tâm của khối cầu và đường tròn này vuông góc với mặt phẳng vừa nêu.



Hình 3.11.4

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3.46. Nón lá được tạo ra từ một cái khung hình nón với phần vành dưới cùng là một thanh tre được uốn dẻo thành một đường tròn có đường kính 40cm và các thanh tre nối từ đỉnh nón xuống vành lớn gọi là các thanh khung (hình 3.12.1.a). Người ta chia thanh khung thành 16 đoạn bằng nhau, và trên mỗi vạch phân cách người ta lại tiếp tục gắn tiếp các vành nón với kích thước nhỏ hơn cho tới khi có đủ tổng cộng 16 vành nón.



Hình 3.12.1.a

a. Cho biết góc giữa một thanh khung và mặt phẳng đáy của nón là 45°, tính thể tích của chiếc nón.

b. Tính bán kính của vành nón thứ 2 từ dưới đếm lên.

- Câu a: Góc giữa một thanh khung và mặt phẳng đáy của chiếc nón lá cũng là góc giữa một đường sinh và mặt đáy của khối nón. Với dữ kiện về đường kính đáy, ta dễ dàng tìm được chiều cao của khối nón và từ đó tính được thể tích.
- Câu b: Nhận xét thấy có thể đưa bài toán về gọn lại trong một mặt phẳng để xử lí nhờ vào định lý Thales cho tam giác.

Hướng dẫn giải

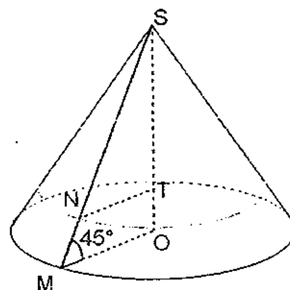
a. Dựng mô hình của chiếc nón như ở hình 3.12.1.b với SO là đường cao của khối nón và OM là một bán kính của vành nón lớn nhất.

Góc giữa thanh khung và mặt phẳng đáy cũng chính là góc SMO và bằng 45°, do vậy nên tam giác SOM vuông cân tại O.

Suy ra: $SO = OM = \frac{40}{2} = 20\ (cm)$.

Thể tích của chiếc nón:

$V = \frac{1}{3}.\pi.20^2.20 = \frac{8000}{3}\pi\ (cm^3)$



Hình 3.12.1.b

b. Gọi N, T lần lượt là giao điểm của vành nón thứ 2 với đường sinh SM và đường cao SO. Vì mặt phẳng đáy nón và mặt phẳng chứa vành nón thứ 2 song song nhau ngoài ra NT, MO lại là giao tuyến của (SMO) với 2 mặt này nên NT//MO.

Trong mp(SMO), xét tam giác SMO: $\frac{NT}{MO} = \frac{SN}{SM} = \frac{15}{16}$ (do thanh khung SM được chia thành 16 phần bằng nhau)

Suy ra $NT = \frac{15}{16}.MO = \frac{15}{16}.20 = \frac{75}{4}(cm) = 18,75\ (cm)$.

Bài 3.47. Trong một trò chơi vận động, các thí sinh phải làm một cái phễu nhỏ có dạng là một hình nón (xem hình 3.12.2.a) sau đó nhanh chóng hứng nước vào đầy phễu rồi rót vào trong một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có đáy và miệng là hình vuông.

Hình 3.12.2.a

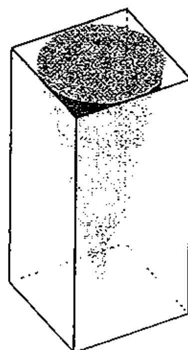
Biết đáy phễu là đường tròn nội tiếp đáy chiếc thùng và chiều cao phễu bằng chiều cao của thùng. Hỏi sau bao nhiêu lần rót nước thì chiếc thùng sẽ đầy nước?

Hướng dẫn giải

Tưởng tượng ta đặt nón vào trong hộp, ta sẽ được kết quả như ở hình 3.12.2.b.

Ta nhận thấy khi đáy nón là đường tròn nội tiếp đáy thùng thì thì độ dài cạnh đáy thùng cũng là đường kính của đáy nón.

Gọi kích thước của thùng là a x a x h (trong đó a là độ dài cạnh đáy thùng, h là chiều cao thùng). Ta so sánh thể tích V_1 của chiếc nón và thể tích V_2 của chiếc thùng:

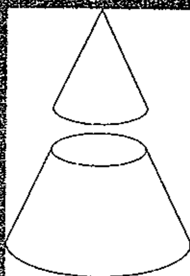


Hình 3.12.2.b

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}.\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.h}{a^2.h}=\frac{1}{3}\pi.\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\pi \Rightarrow V_2=\frac{12}{\pi}V_1\approx 3,82V_1.$$

Vậy cần rót nước 4 lần bằng phễu thì mới đầy thùng.

Bài 3.48: Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng song song với đáy thì phần hình nón nằm giữa mặt phẳng và đáy gọi là hình nón cụt (xem hình 3.12.3.a). Một chiếc cốc có dạng hình nón cụt cao 9cm, bán kính của đáy cốc và miệng cốc lần lượt là 3cm và 4cm. Tính thể tích của chiếc cốc.

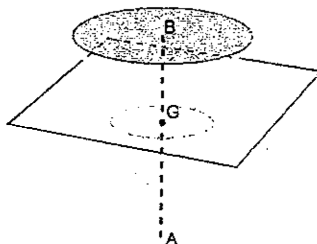


Hình 3.12.3.a

- Bài toán tính thể tích nón cụt tuy mới mà lại không lạ, là vì về phương pháp hoàn toàn tương tự như nón cụt (xem bài 3.37). Bài toán quy về việc đưa bán kính đáy lớn, đáy nhỏ và chiều cao vào cùng một mặt phẳng và xử lý bài toán hình học phẳng trong đó.

Hướng dẫn giải

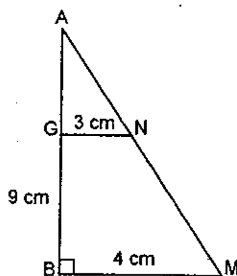
Ta dựng mô hình của chiếc cốc và từ đó dựng được khối nón tương ứng như ở hình 3.12.3.b. Để tính thể tích của chiếc cốc hình nón cụt, ta chỉ cần tính hiệu thể tích của khối nón đáy tâm B và khối nón đáy tâm G như trên hình.



Hình 3.12.3.b

Lấy một điểm M bất kì trên đường tròn đáy lớn, lúc này ta xét bài toán trong mặt phẳng (ABM). (hình 3.12.3.c)

$$\frac{AB}{MB}=\frac{AG}{NG}\Rightarrow\frac{AB}{4}=\frac{AB-9}{3}\Rightarrow AB=36\ cm.$$



Hình 3.12.3.c

Thể tích khối nón lớn: $V_B=\frac{1}{3}.\pi.4^2.36=192\pi\ cm^3$

Thể tích khối nón nhỏ: $V_G=\frac{1}{3}.\pi.3^2.(36-9)=81\pi\ cm^3$

Suy ra thể tích chiếc cốc: $V_B-V_G=111\pi\ cm^3=111\pi\ ml\approx 348,72\ ml$

Tổng quát bài toán: Với một khối nón cụt có bán kính đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là R và r, chiều cao là h, ta sẽ tìm công thức tính thể tích khối nón cụt này.

Sử dụng lại hình 3.12.3.c, lúc này NG = r, MB = R và GB = h.

Ta có:

$$V = V_B - V_G = \frac{1}{3}\pi\left(R^2.AB - r^2.AG\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left[R^2.\left(AG+h\right) - r^2.AG\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left[R^2.h + \left(R^2 - r^2\right).AG\right]$$

Lại có $\frac{AG}{AB} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{AG}{GB} = \frac{r}{R-r} \Rightarrow AG = \frac{r}{R-r}.h$.

Suy ra: $V = \frac{1}{3}\pi\left[R^2.h + \left(R^2 - r^2\right).\frac{r}{R-r}.h\right] = \frac{1}{3}\pi\left[R^2.h + \left(R+r\right).r.h\right] = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$.

Vậy thể tích của khối nón cụt là: $V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$

Tổng quát bài toán: Với một khối nón cụt có bán kính đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là R và r, chiều cao là h, ta sẽ tìm công thức tính thể tích khối nón cụt này.

Sử dụng lại hình 3.12.3.c, lúc này NG = r, MB = R và GB = h.

Ta có:

$$V = V_B - V_G = \frac{1}{3}\pi\left(R^2.AB - r^2.AG\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left[R^2.\left(AG+h\right) - r^2.AG\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left[R^2.h + \left(R^2 - r^2\right).AG\right]$$

Lại có $\frac{AG}{AB} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{AG}{GB} = \frac{r}{R-r} \Rightarrow AG = \frac{r}{R-r}.h$.

Suy ra: $V = \frac{1}{3}\pi\left[R^2.h + \left(R^2 - r^2\right).\frac{r}{R-r}.h\right] = \frac{1}{3}\pi\left[R^2.h + \left(R+r\right).r.h\right] = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$

Vậy thể tích của khối nón cụt là:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right)}$$

Bài 3.49. Một cách khác để tạo ra một hình nón cụt là xoay một hình thang vuông quanh cạnh góc vuông của nó, khi đó cạnh góc vuông gọi là đường cao của hình nón cụt và cạnh bên còn lại gọi là đường sinh. Một khuôn bánh có dạng là một hình nón cụt với góc tạo bởi đường sinh và đáy lớn (tức miệng khuôn) là 60^0. Biết bán kính 2 đáy lần lượt là 5cm và 3cm, tính diện tích miếng kim loại được dùng để tạo ra khuôn bánh.



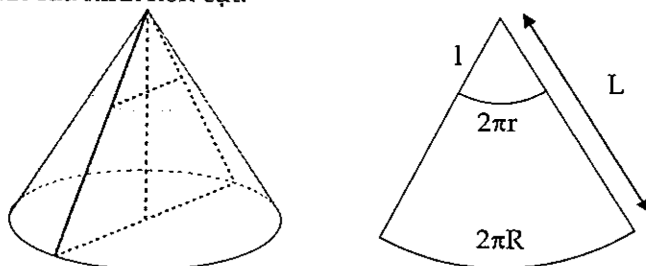
Hình 3.12.4.a

- Dựng mô hình của khuôn bánh là một hình nón cụt, ta nhận xét nếu nối dài các đường sinh của hình nón cụt thì chúng sẽ đồng quy tại một điểm, và từ đó ta có được hình nón tương ứng với hình nón cụt đã dựng.

- Diện tích miếng kim loại bao gồm diện tích xung quanh của khối nón cụt và diện tích đáy nhỏ.
- Để giải bài toán này, ta xét bài toán tổng quát sau:

Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt có bán kính 2 đáy lần lượt là R và r. (R > r).

Nếu cắt một hình nón rỗng đáy dọc theo một đường sinh rồi trải ra mặt phẳng, ta sẽ có hình 3.12.4.b, phần diện tích giới hạn bởi 2 cung tròn và 2 bán kính chính là diện tích xung quanh của hình nón cụt.



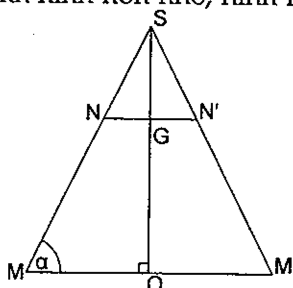
Hình 3.12.4.b

Như ta thấy diện tích xung quanh của hình nón cụt chính là hiệu diện tích của hình nón đáy lớn và hình nón đáy nhỏ.

Gọi S_1, S_2, S_{xq} lần lượt là diện tích xung quanh hình nón nhỏ, hình nón lớn và hình nón cụt.

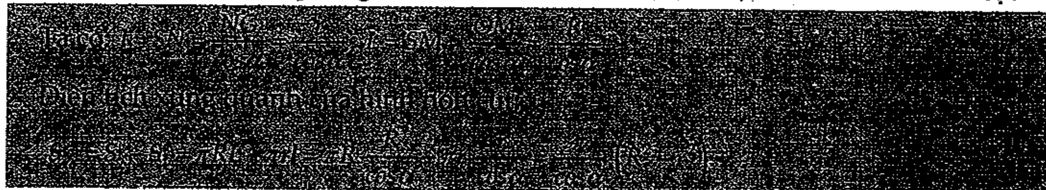
Gọi l và L lần lượt là độ dài đường sinh của hình nón nhỏ và hình nón lớn.

Xét mặt phẳng chứa trục của hình nón và vuông góc với đáy, hình 3.12.4.c cho ta thiết diện của hình nón khi bị cắt bởi mặt phẳng này.



Hình 3.12.4.c

Trong đó: Tam giác cân SMM', tam giác cân SNN' và hình thang cân NN'M'M lần lượt là thiết diện do mặt phẳng đã nếu cắt hình nón lớn, hình nón nhỏ và hình nón cụt.


[redacted]

Vậy diện tích xung quanh của một hình nón cụt có bán kính đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là R và r là: $S_{xq} = \frac{\pi}{\cos\alpha}\left(R^2 - r^2\right)$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức, ta có diện tích xung của khuôn bánh là:

$$S_{xq} = \frac{\pi}{\cos 60^o}\left(5^2 - 3^2\right) = 2\pi.16 = 32\pi \ \left(cm^2\right)$$

Diện tích miếng kim loại là tổng diện tích xung quanh của khuôn nón và diện tích đáy nhỏ: $S_{xq} + \pi.r^2 = 32\pi + \pi.3^2 = 41\pi \ \left(cm^2\right)$

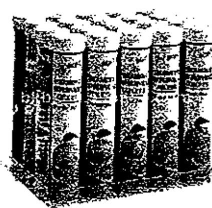
Bài 3.50. Một lọ vitamin C có dạng hình trụ với bán kính đáy là 1,5cm và chiều cao là 8cm. Những viên sủi vitamin C được đựng trong lọ cũng có dạng hình trụ với diện tích đáy bằng diện tích đáy lọ và thể tích mỗi viên là $\frac{9}{5}\pi\ \left(cm^3\right)$.

a. Hỏi trong lọ có tổng cộng bao nhiêu viên vitamin C?

b. Những lọ vitamin này được xếp thẳng đứng sát nhau vào một khay hình hộp chữ nhật. Hỏi chiều dài và chiều rộng của khay là bao nhiêu để chứa được 20 lọ xếp thành 5 hàng, mỗi hàng 4 lọ?



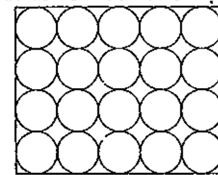
Hình 3.12.5.a



Hình 3.12.5.b

• Câu a: Để xác định được số viên thuốc trong lọ, ta chỉ cần tìm được thể tích lọ rồi chia kết quả cho thể tích từng viên. Vì lọ có dạng hình trụ nên để tìm thể tích ta dùng công thức: $V = B.h = \pi r^2 h$ trong đó r là bán kính đáy và h là chiều cao lọ. Rõ ràng những thông tin này ta đều đã có.

• Câu b: Để giải quyết câu b, ta hãy quan sát hình chiếu với phương chiếu vuông góc với đáy khay, khi đó ta sẽ thấy hình ảnh như hình 3.12.5.c.



Hình 3.12.5.c

Hướng dẫn giải

a. Thể tích V_1 của chiếc lọ: $V_1 = \left(\pi.1{,}5^2\right).8 = 18\pi\ \left(cm^3\right)$.

[redacted]

b. Chiều dài khay bằng 5 lần đường kính đáy lọ: 5.2.1,5 = 15 (cm).

Chiều rộng khay bằng 4 lần đường kính đáy lọ: 4.2.1,5 = 12 (cm).

Bài 3.51. Một xilanh hình trụ có một pít-tông là phần dùng để ngăn cách 2 khoang của xilanh (cũng có dạng hình trụ). Cho biết đường kính đáy và chiều cao xilanh lần lượt là 8cm và 50cm. Ban đầu, một khoang của xilanh chứa đầy nước với thể tích $560\pi\ \left(cm^3\right)$.

Sau đó người ta bắt đầu đẩy pít-tông để xả nước ra ngoài. Biết rằng cứ 1 phút thì pít – tông di chuyển được 5cm dọc theo thân xilanh.

a. Hỏi sau bao lâu thì 2 khoang của xilanh có cùng thể tích, biết chiều cao của pít-tông là 6cm?

b. Hỏi mất bao lâu để đẩy hết nước ra khỏi xilanh?



Hình 3.12.6

Hướng dẫn giải

a. Tổng chiều cao của 2 khoang xilanh: 50 – 6 = 44 (cm)

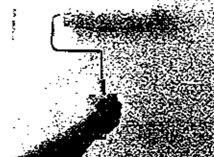
Chiều cao ban đầu của khoang chứa nước: $h_1 = \dfrac{560\pi}{\pi.4^2} = 35\ (cm)$.

[redacted]

$35 - 5t = 22 \Leftrightarrow t = \dfrac{13}{5} = 2{,}6$ (phút) = 2 phút 36 giây.

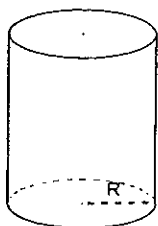
b. Thời gian cần thiết để đẩy hết nước ra ngoài: $\dfrac{35}{5} = 7$ (phút)

Bài 3.52. Một cây lăn sơn tường có dạng là một khối trụ với bán kính đáy là 5cm và chiều cao là 30cm. Nhà sản xuất cho biết sau khi lăn 1 triệu vòng thì cây sơn tường có thể sẽ bị hỏng. Tính diện tích mà cây sơn tường lăn được trước khi hỏng.

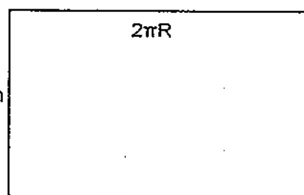


Hình 3.12.7

- Nếu cắt một hình trụ rỗng 2 đáy theo một đường sinh của nó, rồi trải ra mặt phẳng thì ta sẽ có một hình chữ nhật có kích thước chính bằng chiều cao và chu vi đáy của hình trụ.



Hình 3.12.7.b



Hình 3.12.7.c

- Diện tích mà cây sơn tường sơn được trong 1 vòng lăn cũng là diện tích của hình chữ nhật ở hình 3.12.7.c

Hướng dẫn giải

[redacted]

Bài 3.53. Một nhà sản xuất sữa có 2 phương án làm hộp sữa: hộp sữa có dạng khối hộp chữ nhật hoặc hộp sữa có dạng khối trụ. Nhà sản xuất muốn chi phí bao bì càng thấp càng tốt (tức diện tích toàn phần của hộp), nhưng vẫn phải chứa được một thể tích xác định. Hỏi phương án nào tốt hơn trong 2 phương án đã nêu?

Hướng dẫn giải

Phương án 1: Hộp sữa có dạng hình hộp chữ nhật

Gọi kích thước của hộp sữa là a x b x c và V là thể tích cần đạt được mà nhà sản xuất yêu cầu. (a, b, c, V > 0)

Như vậy ta có: abc = V.

Diện tích toàn phần của hộp sữa trên: $S_1 = 2(ab + bc + ca)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số nguyên dương ab, bc, ca:

$ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab.bc.ca} = 3\sqrt[3]{a^2.b^2.c^2} = 3\sqrt[3]{V^2}$

Suy ra: $S_1 \geq 6\sqrt[3]{V^2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \sqrt[3]{V}$.

Phương án 2: Hộp sữa có dạng hình trụ

Gọi h và r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của chiếc hộp hình trụ (h, r > 0)

Theo yêu cầu nhà sản xuất: $\pi r^2 h = V \Rightarrow rh = \frac{V}{\pi r} \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$

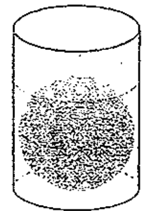
Diện tích toàn phần của chiếc hộp bằng diện tích xung quanh cộng diện tích hai đáy: $S_2 = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi\left(rh + r^2\right) = 2\pi\left(r\frac{V}{\pi r^2} + r^2\right) = 2\pi\left(\frac{V}{\pi r} + r^2\right)$

Ta có: $\frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r} + r^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}$ (bất đẳng thức Cauchy)

Suy ra: $S_2 \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

Với 2 giá trị nhỏ nhất của S_1, S_2 lần lượt là $6\sqrt[3]{V^2}$; $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$, ta thấy ngay $6\sqrt[3]{V^2} > 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ hay nói cách khác phương án sử dụng hộp sữa hình trụ sẽ tiết kiệm diện tích bao bì hơn.

Bài 3.54. Người ta thả một quả bóng hình cầu vào một cốc nước thì mực nước dâng lên tại vị trí cao nhất của quả bóng, nghĩa là mặt nước là mặt phẳng tiếp xúc với quả bóng. Cho biết đường kính đáy cốc là 14cm và chiều cao mực nước ban đầu là 4cm. Tính bán kính quả bóng? (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm) (dựa trên đề thi Học sinh giỏi Máy tính cầm tay tỉnh Thừa Thiên Huế - 2004 – 2005)



Hình 3.12.8

• Nhận xét: Theo mô tả của đề bài, rõ ràng chiều cao mực nước sau khi nhúng chìm quả bóng vào cốc cũng chính là đường kính quả bóng. Từ đó ta sẽ xác định được độ tăng thể tích, cũng là thể tích quả bóng hình cầu và tìm lại được bán kính R của quả bóng theo công thức $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Hướng dẫn giải

Gọi r (cm) là bán kính quả bóng.

Theo đề bài ta có: $\pi 7^2 4 + \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi 7^2 2r \Leftrightarrow 196\pi + \frac{4}{3}\pi r^3 = 98\pi r \Leftrightarrow \frac{4}{3}r^3 - 98r + 196 = 0$

$\Leftrightarrow r \approx 7,31$ (cm) hay $r \approx 2,13$ (cm)

Bài 3.55. Một viên kem hình cầu có thể tích $\frac{256}{3}\pi\ (cm^3)$ được đặt vào một chiếc bánh cốc có dạng hình trụ với đường kính đáy là 6cm là và chiều cao là 14cm. Hỏi chiều cao của phần kem nhô ra khỏi chiếc bánh là bao nhiêu, giả sử viên kem không bị biến dạng trong suốt quá trình trên. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

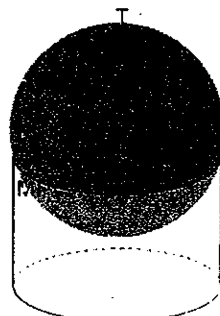


Hình 3.12.9.a

- Nhận xét: Chiều cao của phần viên kem nhô ra ngoài là tổng của bán kính và khoảng cách từ tâm viên kem (tâm khối cầu) đến mặt phẳng miệng cốc.
- Thiết diện của khối cầu khi bị cắt bởi mặt phẳng miệng cốc cũng chính là miệng cốc (một đường tròn có đường kính 6cm). (Hình 3.12.9.b)

Hướng dẫn giải

Bán kính r của viên kem: $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\frac{4}{3}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{256}{3}\pi}{\frac{4}{3}\pi}} = 4\ (cm)$.



Hình 3.12.9b

Bán kính R của đáy cốc: R = 3 (cm)

Xây dựng mô hình viên kem là khối cầu tâm O, bán kính r. Tâm của miệng cốc là điểm B. Lấy M là một điểm trên vành miệng cốc, ta dễ dàng có được OM = r = 4cm; BM = R = 3cm.

Xét tam giác OMB vuông tại B, khoảng cách từ O đến mặt phẳng miệng cốc cũng chính là độ dài đoạn OB: $OB = \sqrt{OM^2 - MB^2} = \sqrt{7}\ (cm)$

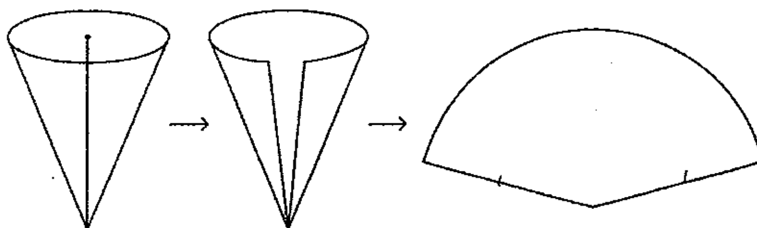
Như vậy chiều cao của viên kem nhô ra khỏi miệng cốc là tổng của bán kính viên kem và độ dài OB: $R + OB = 4 + \sqrt{7}\,(cm) \approx 6,65\ (cm)$.

CHỦ ĐỀ 3: MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ MÔ HÌNH CÁC KHỐI

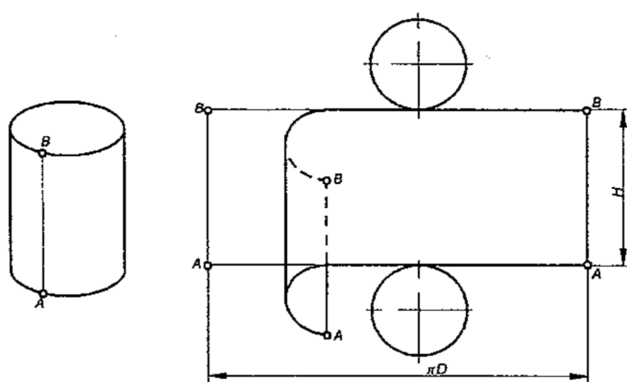
Ta xem lại một số lưới đa giác dùng để tạo mô hình của các khối đa diện.

Khối tứ diện	Khối chóp tứ giác đều	Khối lập phương	Khối hộp chữ nhật
Hình 3.13.1	*Hình 3.13.2*	*Hình 3.13.3*	*Hình 3.13.4*

Ngoài ra với các khối tròn xoay, ta cũng có thể làm tương tự bằng cách cắt các khối tròn xoay dọc theo một đường sinh rồi trải ra một mặt phẳng, ta sẽ có kết quả như các hình sau đối với khối trụ và khối nón.



Hình 3.13.5

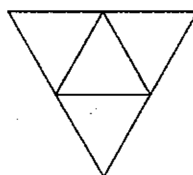


Hình 3.13.6

Khối nón	Khối nón cụt	Khối trụ
Hình 3.13.7	*Hình 3.13.8*	*Hình 3.13.9*

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3.56. Cho lưới đa giác của mô hình một khối tứ diện đều có dạng như hình 3.14.1. Biết lưới là một tam giác đều có cạnh 8cm. Tính thể tích của mô hình khối tứ diện đều tạo thành.



Hình 3.14.1.a

- Nhận xét: Cạnh của lưới dài gấp đôi cạnh của mỗi mặt bên khối tứ diện.

Hướng dẫn giải

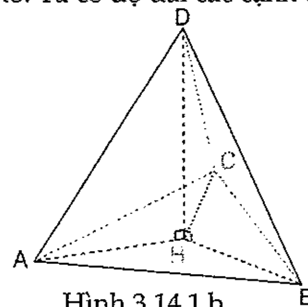
Dựng mô hình của khối tứ diện từ lưới đa giác đã cho. Ta có độ dài các cạnh của tứ diện: DA = DB = DC = AB = BC = CA = 4 (cm).

Gọi H là hình chiếu của D lên mặt phẳng (ABC).

Ta có: $AH = AB.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2}{3} = 4.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}(cm)$.

Xét tam giác DHA vuông tại H:

$DH = \sqrt{DA^2 - AH^2} = \sqrt{4^2 - \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}\ (cm)$.



Hình 3.14.1.b

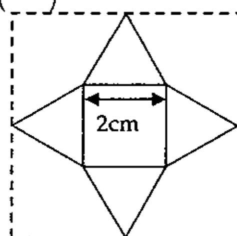
Thể tích của khối tứ diện:

$$V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.DH = \frac{1}{3}.\left(AB^2.\frac{\sqrt{3}}{4}\right).\frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3}.\left(4^2.\frac{\sqrt{3}}{4}\right).\frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\ \left(cm^3\right).$$

Bài 3.57. Cho lưới đa giác của mô hình một khối chóp tứ giác đều có các mặt bên là các tam giác đều như ở hình 3.14.2.a.

a. Với các kích thước cho trên hình, hãy tính thể tích của mô hình khối chóp tứ giác này.

b. Người ta cắt lưới đa giác này từ một miếng bìa hình vuông (phần đứt nét trong hình 3.14.2.a). Tính diện tích miếng bìa.



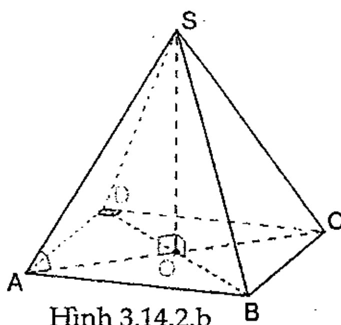
Hình 3.14.2.a

Hướng dẫn giải

a. Dựng mô hình của khối chóp tứ giác đều S.ABCD từ lưới đã cho với O là hình chiếu của S lên đáy.

Theo lưới, ta có được tất cả các cạnh của khối chóp này đều bằng 2cm.

Tương tự bài 3.58, ta tính được thể tích khối chóp:



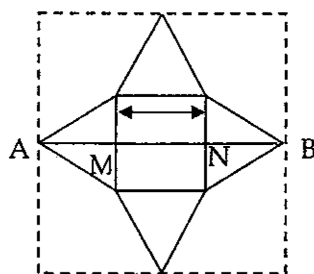
Hình 3.14.2.b

$$V = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO$$

$$= \frac{1}{3}.2^2.\sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{1}{3}.2^2.\sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(cm^3\right)$$

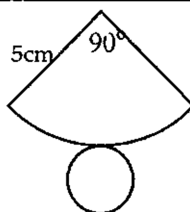
b. Độ dài cạnh miếng bìa hình vuông cũng là độ dài đoạn thẳng AB.

$$AB = AM + MN + NB = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} + 2(cm)$$



Hình 3.14.2.c

Bài 3.58. Cho lưới của một hình nón có các kích thước như hình vẽ, tính thể tích mô hình của hình nón này.



Hình 3.14.3

- Nhận xét: độ dài 5cm trên hình chính là độ dài đường sinh của hình nón.
- Độ dài cung tròn có góc ở tâm 90°, bán kính 5cm trên hình chính là chu vi đáy, như vậy ta có thể tìm được bán kính đáy.

Hướng dẫn giải

Độ dài cung tròn có góc ở tâm 90°, bán kính 5cm: $C = \frac{90}{360}.2\pi.5 = \frac{5}{2}\pi\ (cm)$.

Vì độ dài cung tròn vừa tìm cũng chính là chu vi đáy hình nón, gọi r (cm) là bán kính đáy, ta có: $2\pi r = \frac{5}{2}\pi \Rightarrow r = \frac{5}{4}\ (cm)$.

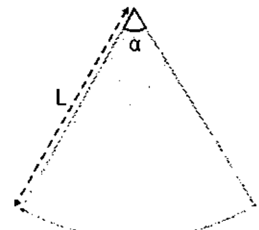
Dựng mô hình của hình nón với đường sinh l = 5cm; bán kính đáy $r = \frac{5}{4}cm$, chiều cao là h. Ta có: $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{15}}{4}(cm)$.

Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}.\pi r^2.h = \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{5}{4}\right)^2.\frac{5\sqrt{15}}{4} = \frac{125\sqrt{15}}{192}\pi\ (cm^3)$.

Dựng mô hình của một hình nón từ một miếng bìa hình quạt có bán kính là L (cũng là độ dài đường sinh của hình nón) và góc ở tâm là α (đơn vị là độ).

Khi đó, độ dài cung tương ứng chính là chu vi đáy R của hình nón được dựng.

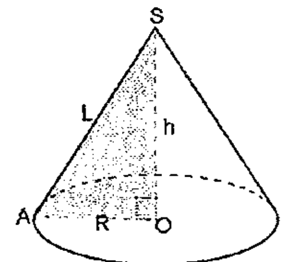
Ta có hệ thức: $2\pi R = \frac{\alpha}{360}.2\pi L \Leftrightarrow \frac{R}{L} = \frac{\alpha}{360}$



Hình 3.14.3.b

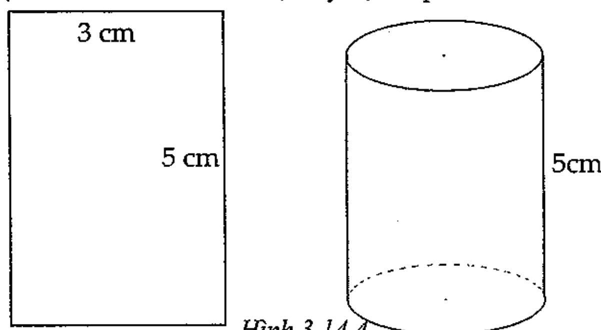
Xét hình nón có độ dài đường sinh là L và bán kính đáy là R, khi đó chiều cao h của hình nón là: $h = \sqrt{L^2 - R^2}$

Như vậy tùy theo dữ kiện đề bài mà ta sẽ biểu diễn h theo L hoặc R cho hợp lí.



Mở rộng bài toán: Ta có thể cắt miếng bìa hình quạt để tạo thành một hình nón cụt, tham khảo câu 29, phần ***Bài tập trắc nghiệm.***

Bài 3.59. Cho một miếng bìa hình chữ nhật có kích thước 5cm x 3cm. Cuộn miếng bìa lại theo chiều rộng rồi dùng băng dính để nối 2 mép miếng bìa, ta được mô hình của một hình trụ. Tính thể tích khối trụ này? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Hình 3.14.4

Hướng dẫn giải

Tương tự bài 3.60, chu vi đáy và chiều cao của khối trụ lần lượt là chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật. Gọi r (cm) là bán kính của đáy khối trụ, ta có $2\pi r = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{2\pi}(cm)$.

Thể tích khối trụ: $V = Bh = \left(\pi r^2\right)h \approx 3,58\ (cm^3)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

Câu 1. Cho khối chóp tứ giác S.ABCD có O là giao điểm của AC và BD. Những khối đa diện nào dưới đây có thể lắp ghép với nhau để tạo thành khối chóp ban đầu?

(I) các khối tứ diện S.ACD, S.AOB, S.COB.

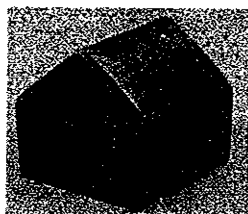
(II) các khối tứ diện S.ABD, S.OCD, S.OCB.

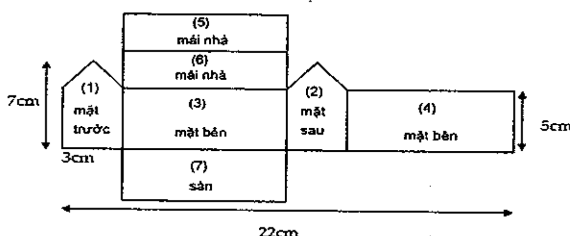
(III) các khối tứ diện S.OAB, S.OBC, S.OCD, S.ODA.

(IV) các khối tứ diện S.ACD, S.ABD, S.OBC.

A. (I), (II). **B.** (I), (II), (III). **C.** (I), (IV). **D.** (I), (III), (IV).

Câu 2. Mô hình của một ngôi nhà được cắt ra và trải trên mặt phẳng thành một lưới đa giác như hình vẽ. Tính thể tích của mô hình?





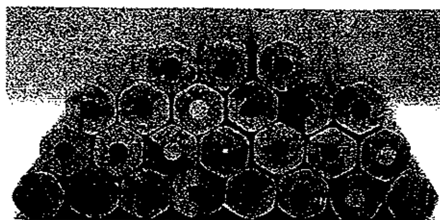
A. *144* cm^3. **B.** *168* cm^3. **C.** *399* cm^3. **D.** *513* cm^3.

Câu 3. Người ta dùng một cái gáo dừa hình bán cầu đựng đầy nước để rót vào trong một cái bình hình trụ chiều cao 25 cm. Biết bán kính của gáo dừa và đáy cốc cùng là 4 cm, hỏi sau tối thiểu bao nhiêu lần rót thì đầy bình?

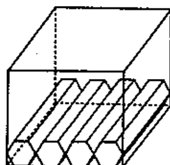


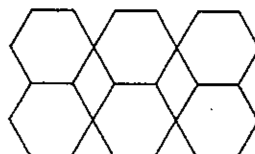
A. 6 lần. **B.** 7 lần. **C.** 10 lần. **D.** 5 lần.

Câu 4. Một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có kích thước 6cm × 6cm × 10cm. Người ta xếp những cây bút chì chưa chuốt có hình lăng trụ lục giác đều (hình 3.21.4.a) với chiều dài 10 cm và thể tích $\frac{1875\sqrt{3}}{2}\left(\text{mm}^3\right)$ vào trong hộp sao cho chúng được xếp sát nhau như hình vẽ (hình 3.21.4.b). Hỏi có thể chứa được tối đa bao nhiêu cây bút chì?



Hình 3.21.4.a





A. 144. **B.** 156.

C. 221. **D.** 576.

Câu 5. Bề mặt một quả bóng da được ghép từ 12 miếng da hình ngũ giác đều và 20 miếng da hình lục giác đều cạnh 4,5 cm. Biết rằng giá thành của những miếng da này là 150 đồng/cm^2.

Tính giá thành của miếng da dùng để làm quả bóng (kết quả làm tròn tới hàng đơn vị)?

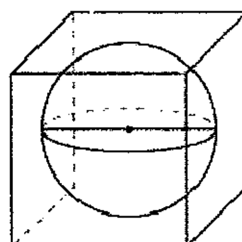


A. 121 500 đồng. **B.** 220 545 đồng.

C. 252 533 đồng. **D.** 199 218 đồng.

(Trích "Geometry for College Student")

Câu 6. Xét một quả bóng hơi có dạng khối cầu có cùng diện tích bề mặt với quả bóng da ở câu 5. Người ta muốn đặt quả bóng này vào trong một chiếc hộp hình lập phương. Tính chiều dài tối thiểu của cạnh chiếc hộp này (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)?



A. 8,03 cm. **B.** 10,28 cm. **C.** 10,82 cm. **D.** 11,57 cm.

Câu 7. Người ta thả chìm 4 viên nước đá có dạng khối lập phương cạnh 3 cm vào một bình nước hình trụ bán kính đáy 5cm, chiều cao 13,5cm. Biết trước khi bỏ đá vào thì chiều cao mực nước trong bình là 12cm. Hỏi sau khi vừa thả chìm đá vào xong thì nhận định nào dưới đây là chính xác? (các kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)

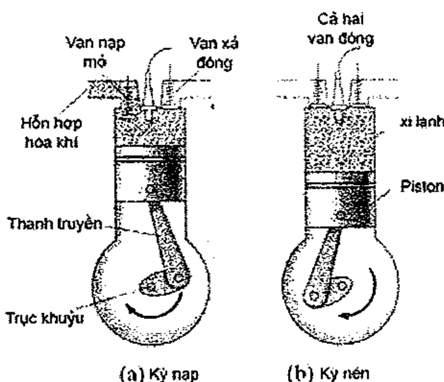
A. Lượng nước tràn ra khỏi bình là $108cm^3$.

B. Lượng nước tràn ra khỏi bình là $27cm^3$.

C. Chiều cao mực nước tăng lên 0,34cm.

D. Chiều cao mực nước tăng lên 1,38cm.

Câu 8. Hình vẽ dưới mô tả hai trong bốn kỳ hoạt động của một động cơ đốt trong. Buồng đốt chứa khí đốt là một khối trụ có thể tích thay đổi bởi sự chuyển động lên xuống của một Pít-tông trong xi lanh. Khoảng cách từ trục khuỷu đến điểm chuyển lực lên thanh truyền là r = 2cm; xi lanh có đường kính d = 6cm. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích lớn nhất và nhỏ nhất của buồng đốt Pít-tông chuyển động. Tính $V_1 - V_2$?



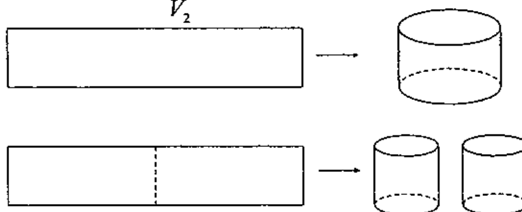
A. 9π . **B.** 36π **C.** 48π. **D.** 18π.

(Trích đề thi thử Trường THPT Thăng Long, Hà Nội)

Câu 9. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước 50cm × 240cm, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

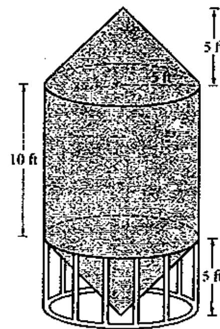
Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

(Trích đề minh họa lần 1, Kỳ thi THPT Quốc gia 2017)

Câu 10. Một bồn chứa thóc có cấu tạo gồm 2 hình nón và một hình trụ có các số đo như hình vẽ. Tính thể tích của bồn chứa, lấy 1 ft = 0,3 m.



A. $9\pi\left(m^3\right)$. **B.** $\frac{9}{4}\pi\left(m^3\right)$

C. $\frac{27}{4}\pi\left(m^3\right)$. **D.** $\frac{63}{8}\pi\left(m^3\right)$.

(Trích đề thi thử SAT 2016, The College Board)

Câu 11. Ba chiếc gáo múc nước có dạng là khối trụ, khối nón và khối nửa cầu lần lượt có thể tích là V_1, V_2, V_3. Biết rằng cả 3 chiếc gáo đều có cùng bán kính đáy và chiều cao, hãy sắp xếp số đo thể tích của 3 chiếc gáo theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

A. $V_1 < V_2 < V_3$. **B.** $V_3 < V_2 < V_1$. **C.** $V_2 < V_1 < V_3$. **D.** $V_2 < V_3 < V_1$.

Câu 12. Ba chiếc gáo múc nước có dạng là khối trụ, khối nón và khối nửa cầu lần lượt có diện tích là S_1, S_2, S_3. Cả 3 chiếc gáo đều có cùng bán kính đáy và thể tích. Biết rằng diện tích càng lớn thì chi phí sản xuất càng sao, hãy chọn nhận định đúng trong các nhận định sau.

[redacted]

Câu 13. Nhà sản xuất yêu cầu tạo ra một hộp sữa dạng khối hộp chữ nhật sao cho dung tích là 330ml mà chi phí sản xuất phải tiết kiệm tối đa. Biết rằng diện tích bề mặt càng lớn thì chi phí càng lớn, hỏi điều nào dưới đây xảy ra khi chi phí sản xuất đạt mức thấp nhất? (a, b, c lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hộp; các kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)

A. $a+b+c=6{,}91$. **B.** $a+b+c=20{,}73$. **C.** $a-b+c=6{,}91$. **D.** $a+b-c=20{,}73$.

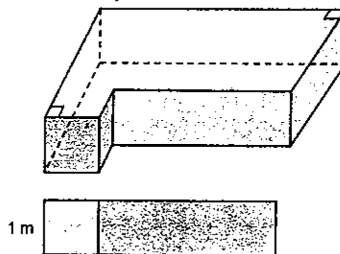
Câu 14. Tương tự các yêu cầu về chi phí và thể tích như câu 13, nhưng nay nhà sản xuất yêu cầu chiếc hộp có dạng khối trụ. Nhận định nào đúng trong các nhận định sau? (R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hộp; kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. $h^3 = 8R^3$. **B.** $h^3 = 48\sqrt{3}R^3$. **C.** $h^3 - R^3 = 800$. **D.** $h^3.R^3 = 60455$.

Câu 15. Một cái tủ bếp hình chữ L (hình 3.21.15.a) có bản vẽ hình chiếu khi nhìn từ mặt trước hay mặt bên là như nhau (hình 3.21.15.b). Tính thể tích của tủ bếp?



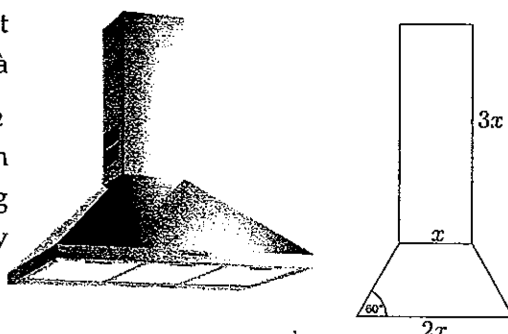
Hình 3.21.15.a



Hình 3.21.15.b

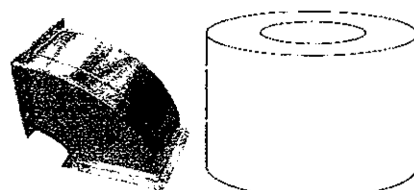
A. $21\ m^3$. **B.** $26\ m^3$. **C.** $31\ m^3$. **D.** $36\ m^3$.

Câu 16. Một ống khói có cấu trúc gồm một khối chóp cụt tứ giác đều có thể tích V_1 và một khối hộp chữ nhật có thể tích V_2 ghép lại với nhau như hình. Cho biết bản vẽ hình chiếu của ống khói với phương chiếu trùng với phương của một cạnh đáy khối chóp cụt, hãy tính thể tích $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{7\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{18}$.

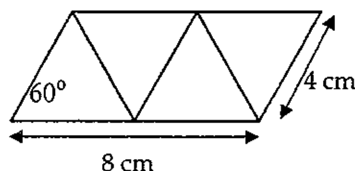
Câu 17. Người ta tạo ra một ống thông gió bằng cách khoét một lỗ có dạng hình trụ ngay giữa một khối trụ bằng kim loại (cả 2 khối trụ này có cùng trục và chiều cao), sau đó cắt khối vừa tạo ra thành 4 phần bằng nhau.



Biết bán kính đáy của khối kim loại ban đầu là 5 m và chiều cao là 3 m, hỏi đường kính đáy của phần lỗ được khoét phải là bao nhiêu để thể tích của ống thông gió đạt giá trị $15,75\pi$ m^3?

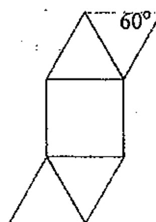
A. 2 m. B. 4m. **C.** $\frac{79}{4}$ m. **D.** $\frac{79}{2}$ m.

Câu 18. Người ta chia một miếng bìa hình bình hành có kích thước như hình vẽ rồi gấp theo các đường kẻ để tạo thành một khối tứ diện đều. Tính thể tích của khối tứ diện đều?



A. $16\sqrt{3}$ (cm^3). **B.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ (cm^3) **C.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ (cm^3). **D.** $8\sqrt{3}$ (cm^3).

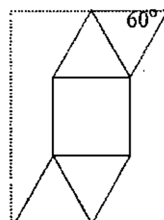
Câu 19. Mô hình của một khối chóp tứ giác đều được tạo thành bằng cách gấp một tấm bìa có diện tích $4+4\sqrt{3}$ (cm^2) như hình vẽ. Tính thể tích của mô hình này?



A. $\frac{8}{3}$ (cm^3). **B.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (cm^3)

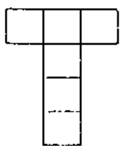
C. $4\sqrt{2}$ (cm^3). **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}(cm^3)$.

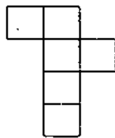
Câu 20. Người ta cắt miếng bìa ở câu 19 từ một miếng bìa hình chữ nhật như hình vẽ. Nếu cuộn miếng bìa này theo chiều dài của nó thì được một hình trụ không đáy. Tính thể tích của khối trụ này.

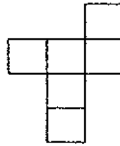


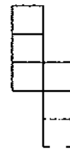
A. 8 (cm^2). **B.** 6 (cm^2) **C.** $8+16\sqrt{3}$ (cm^2). **D.** $8+8\sqrt{3}$ (cm^2).

Câu 21. Có bao nhiêu lưới đa giác trong số các lưới dưới đây có thể gấp lại tạo thành mô hình một khối lập phương?


(I)

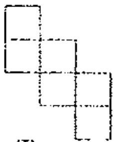

(II)

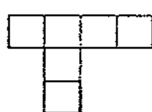

(III)

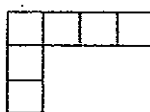

(IV)

A. 1 . **B.** 2 **C.** 3. **D.** 4.

Câu 22. Có bao nhiêu lưới đa giác trong số các lưới dưới đây có thể gấp lại tạo thành mô hình một khối lập phương?


(I)

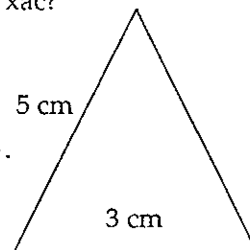

(II)


(III)


(IV)

A. 1 . **B.** 2 **C.** 3. **D.** 4.

Câu 23. Cho bản vẽ hình chiếu của một khối chóp tứ giác đều với phương chiếu trùng với phương của một cạnh đáy. Kết luận nào dưới đây là chính xác?



(I) Thể tích của khối chóp tứ giác đều là $\frac{3\sqrt{91}}{2}$ cm^3.

(II) Giá trị tan của góc tạo bởi mỗi cạnh bên và đáy là $\frac{\sqrt{91}}{3}$.

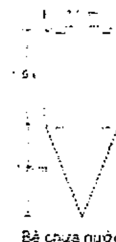
(III) Diện tích xung quanh của khối chóp là $3\sqrt{91}$ $\left(\text{cm}^2\right)$.

(IV) Giá trị cosin của góc giữa mỗi mặt bên và đáy là $\frac{3}{10}$.

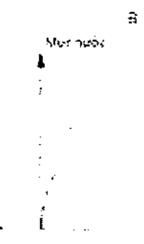
A. (I) . **B.** (II), (III).

C. (I), (IV). **D.** (III), (IV).

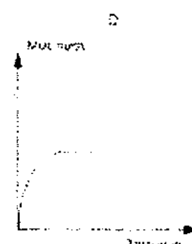
Câu 24. Một bể chứa nước có dạng như hình vẽ. Ban đầu, bể không có nước. Sau đó người ta bơm nước vào bể với tốc độ 1 lít/giây. Đồ thị nào sau đây cho biết chính xác sự thay đổi độ cao của nước theo thời gian?







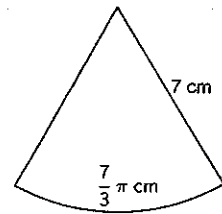




A. Hình A. **B.** Hình B. **C.** Hình C. **D.** Hình D.

(Trích "Tài liệu Tập huấn PISA 2015 và các dạng câu hỏi do OECD phát hành lĩnh vực Toán học", Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Câu 25. Mô hình của một hình nón được tạo ra bằng cách cuộn một hình quạt có kích thước như trong hình. Tính thể tích của khối nón tương ứng. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



A. $9,84cm^3$. **B.** $9,98cm^3$

C. $29,51cm^3$. **D.** $29,94cm^3$.

Câu 26. Người ta tạo ra 4 chiếc nón sinh nhật giống nhau bằng cách cắt một miếng bìa hình tròn đường kính 40 cm thành 4 hình quạt bằng nhau. Mỗi hình quạt được cuộn lại để tạo thành chiếc nón (2 mép được đính bằng băng dính sao cho không đè chồng lên nhau). Tính tổng thể tích của 4 chiếc nón theo lít. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 6,28 lít. **B.** 0,51 lít. **C.** 2,03 lít. **D.** 1,57 lít.

Câu 27. Người ta tạo ra những chiếc nón từ một miếng bìa hình tròn đường kính 32 cm bằng một trong 2 phương án sau:

I: Chia miếng bìa thành 3 hình quạt bằng nhau rồi cuộn mỗi hình quạt lại thành một chiếc nón V.

II: Chia miếng bìa thành 6 hình quạt bằng nhau rồi cuộn mỗi hình quạt lại thành một chiếc nón có thể tích V'.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là tổng thể tích của những chiếc nón tạo ra theo cách 1 và cách 2. Nhận định nào đúng trong các nhận định sau:

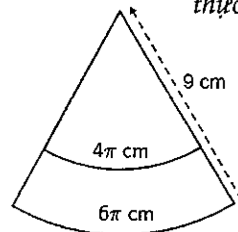
A. $V > V'$. **B.** $V = V'$. **C.** $V_1 = \frac{1}{3}V_2$. **D.** $V_1 = \frac{1}{2}V_2$.

Câu 28. Với một đĩa tròn bằng thép trắng có bán kính $R = \sqrt{6}$ (cm) phải làm một cái phễu hình nón bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành hình nón. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để dung tích của phễu đạt giá trị lớn nhất? (kết quả làm tròn tới hàng đơn vị)

A. $2,8^o$. **B.** $12,56^o$. **C.** 66^o. **D.** 294^o.

(Trích "Tăng tốc kĩ năng giải toán trắc nghiệm chuyên đề : Ứng dụng đạo hàm vào bài toán thực tế", Cô Phạm Thị Liên)

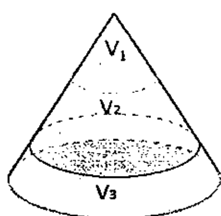
Câu 29. Gấp một phần của hình vành khăn với các kích thước như hình vẽ, tính thể tích của khối nón cụt tạo thành?

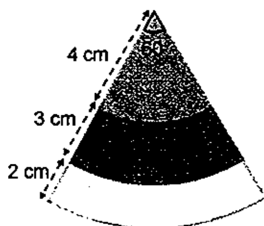


A. $\frac{19\sqrt{5}}{3}\pi\ cm^3$. **B.** $\frac{38\sqrt{2}}{3}\pi\ cm^3$

C. $38\sqrt{2}\pi\ cm^3$. **D.** $19\sqrt{5}\pi\ cm^3$.

Câu 30. Chia một khối nón thành 3 phần gồm một khối nón có thể tích V_1 và 2 khối nón cụt như hình vẽ (khối kề với khối nón nhỏ có thể tích V_2 và khối nằm dưới có thể tích V_3). Sau đó người ta cắt khối nón ban đầu theo một đường sinh của nó rồi trải ra mặt phẳng và tiến hành đo đạc các kích thước. Nhận định nào dưới đây là đúng?



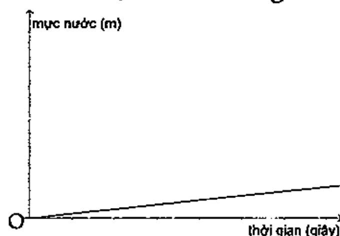


A. $V_1 < V_2 < V_3$. **B.** $V_3 < V_2 < V_1$. **C.** $V_2 < V_1 < V_3$. **D.** $V_2 < V_3 < V_1$.

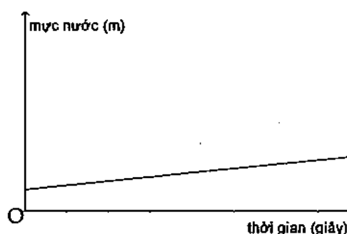
Câu 31. Gia đình Na muốn làm một bể nước hình trụ có thể tích $150\ m^3$. Đáy bể là bằng bê tông giá 100.000 đồng/m^2, phần thân làm bằng tôn giá 90.000 đồng/m^2, phần nắp làm nhôm không gỉ giá 120.000 đồng/m^2. Hỏi khi chi phí sản xuất bể đạt mức thấp nhất thì hiệu giữa chiều cao bể và bán kính đáy là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 2,69 m. **B.** 6,58 m. **C.** 3,89 m. **D.** 12,15 m.

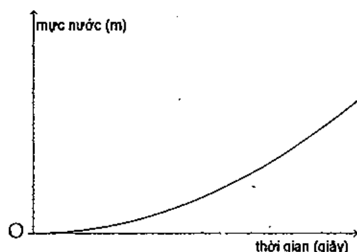
Câu 32. Một hồ nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước 10 m x 5 m x 3 m. Ban đầu trong hồ đã có sẵn 200 lít nước, sau đó người ta bắt đầu bơm tiếp nước vào hồ với tốc độ 10 lít/ giây. Hỏi đồ thị nào dưới đây mô tả đúng nhất sự thay đổi về chiều cao của mực nước trong hồ?



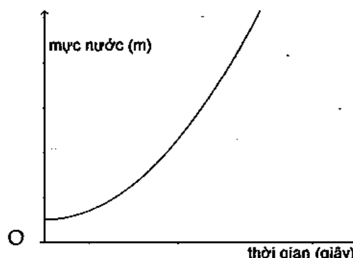
Hình A.



Hình B.



Hình C.



Hình D.

A. Hình A. **B.** Hình B. **C.** Hình C. **D.** Hình D.

Câu 33. Một hệ thống cửa xoay gồm 4 cánh cửa hình chữ nhật có chung một cạnh và được sắp xếp trong một buồng cửa hình trụ như hình vẽ.

Tính thể tích của buồng cửa, biết chiều cao và chiều rộng của mỗi cánh cửa lần lượt là 2,5 m và 1,5 m.



A. $\frac{45\pi}{8}\ m^3$. **B.** $\frac{45}{8}\ m^3$

C. $\frac{75\pi}{8}\ m^3$. **D.** $\frac{75}{8}\ m^3$.

Câu 34. Truyện kể rằng có một con quạ khát nước và tìm thấy một chiếc bình đựng sẵn 100 ml nước bên trong nhưng khổ nỗi chiếc mỏ của nó lại không thể nào chạm đến mực nước trong bình. Con quạ thông minh bèn gắp những hòn sỏi nhỏ có thể tích 12 ml và thả chìm vào đáy bình và đợi cho đến khi nước dâng lên đến miệng bình thì mới uống cho thỏa thích.

Biết rằng cấu tạo chiếc bình gồm một khối nón cụt và một khối trụ có chung đáy là đáy nhỏ của khối nón cụt như hình vẽ;



bán kính đáy lớn và đáy nhỏ của khối nón cụt lần lượt là 5 cm và 1,5 cm; chiều cao của khối nón cụt và khối trụ lần lượt là 10 cm và 3 cm. Hỏi con quạ cần phải bỏ vào bình bao nhiêu viên đá thì mới có thể bắt đầu uống nước?

A. 32 viên. **B.** 33 viên. **C.** 23 viên. **D.** 24 viên.

Câu 35. Các kích thước của một bể bơi được cho như trên hình (mặt nước được xem như có dạng là hình chữ nhật khi phẳng lặng). Hỏi nếu người ta bơm nước vào bể từ khi bể trống rỗng đến lúc đầy nước với tốc độ 100 lít/giây thì mất bao nhiêu thời gian?

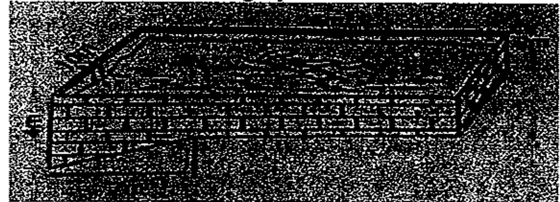
A. 5,7 giây.

B. 9 phút 30 giây.

C. 1 giờ 35 phút.

D. 2 giờ 46 phút 40 giây.

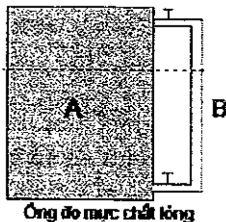
(Sưu tầm)

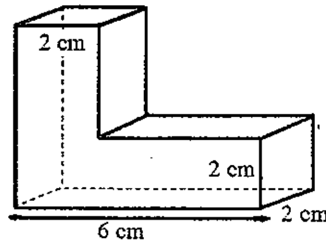


Câu 36. Một lon trà hình trụ được đặt vừa khít trong một chiếc hộp quà hình hộp chữ nhật. Hỏi thể tích của lon trà chiếm bao nhiêu phần trăm thể tích của hộp quà? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 25% . **B.** 78,54%. **C.** 50% . **D.** 39,27% .

Câu 37. Thiết bị trong hình là một hệ thống gồm: (A) Một bồn nước có dạng khối trụ với vỏ làm bằng nhựa, không trong suốt; (B) Một ống dẫn trong suốt được gắn thông với bồn (A). Thiết bị hoạt động theo nguyên tắc của bình thông nhau, nghĩa là mực nước ở (B) có cùng độ cao với mực nước trong bồn (A). Biết các kích thước của thiết bị được cho như hình, và thể tích chất lỏng trong bồn (A) và ống (B) lần lượt là 375π (lít) và 616 (ml), tính bán kính đáy bồn (làm tròn tới hàng phần trăm)?

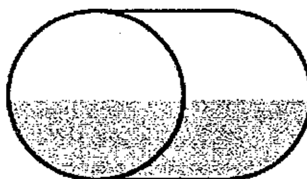




A. 50 cm. **B.** 50,34 cm. **C.** 49,67 cm. **D.** 49,35 cm.

Câu 38. Một bồn nước có dạng hình trụ, chiều cao 2 m, bán kính đáy là 0,5 m được đặt nằm ngang trên mặt sàn bằng phẳng.

Hỏi khi chiều cao mực nước trong bồn là 0,25 m thì thể tích nước trong bồn là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



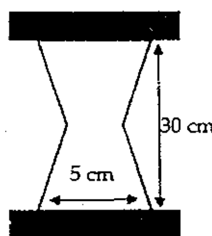
A. 392,70 lít **B.** 433,01 lít.

C. 307,09 lít. **D.** 1570,80 lít.

Câu 39. Với cùng chiếc bồn ở câu 38, hỏi khi thể tích nước trong bồn là 1264 lít thì chiều cao mực nước là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 0,25 m. **B.** 0,75 m. **C.** 0,5 m. **D.** 0,71 m.

Câu 40. Một chiếc đồng hồ cát có cấu trúc gồm hai khối nón cụt giống nhau đặt chồng lên nhau (phần tiếp xúc là đáy nhỏ của hay khối nón cụt). Biết rằng chiều cao và đường kính đáy của chiếc đồng hồ cát lần lượt là 30 cm và 5 cm, hỏi nếu thể tích của đồng hồ là $\frac{555\pi}{2}$ (ml) thì bán kính phần đáy tiếp xúc giữa hai phần của đồng hồ là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



A. 0,25 cm. **B.** 0,5 cm. **C.** 3,56 cm. **D.** 7,12 cm.

Câu 41. Một thùng hình trụ chứa nước, có đường kính đáy là $12,24\ cm$. Mực nước trong thùng cao $4,56cm$. Một viên bi kim loại hình cầu được thả vào thùng thì mực nước dâng cao lên sát với điểm cao nhất của viên bi. Bán kính của viên bi gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau đây biết rằng viên bi có đường kính không vượt quá $6cm$? *(Thi HKI, THPT Amsterdam, Hà Nội, 2016)*

A. $2,59\ cm$. **B.** $2,45\ cm$. **C.** $2,86\ cm$. **D.** $2,68\ cm$.

Câu 42. Một cái ly có dạng hình nón như sau (xem hình vẽ). Người ta đổ một lượng nước vào ly sao cho chiều cao lượng nước trong ly bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của ly.

Hỏi nếu bịt kín miệng ly rồi lộn ngược lên thì tỷ lệ chiều cao của mực nước và chiều cao của ly bằng bao nhiêu? ***(THPT Nguyễn Đăng Đạo, Bắc Ninh, 2016)***



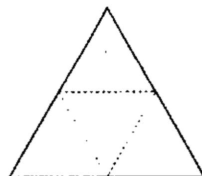
A. $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{3-\sqrt[3]{26}}{3}$.

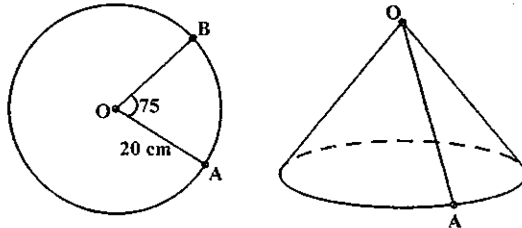
Câu 43. Người ta cắt miếng bìa tam giác đều cạnh bằng 2 cm như hình vẽ và gấp theo các đường kẻ, sau đó dán các mép lại để được hình tứ diện đều. Tính thể tích V của khối tứ diện đều ***(Sưu tầm Facebook, 2016)***

A. $V=\frac{\sqrt{3}}{96}\left(cm^3\right)$. **B.** $V=\frac{\sqrt{2}}{12}\left(cm^3\right)$.

C. $V=\frac{\sqrt{2}}{96}\left(cm^3\right)$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}}{16}\left(cm^3\right)$.



Câu 44. Nhân dịp Trường THPT Nguyễn Du tổ chức đi học tập ngoại khóa ở Đà Lạt. Đoàn Trường có tổ chức một cuộc thi làm nón để vui chơi Noel. Hưởng ứng cuộc thi đó, tập thể lớp 12A1 làm những chiếc nón theo các bước như sau: Cắt một mảnh giấy hình tròn tâm O bán kính 20 cm. Sau đó cắt bỏ đi phần hình quạt OAB như hình vẽ sao cho góc ở tâm $\widehat{AOB} = 75^0$. Tiếp theo dán phần hình quạt còn lại theo hai bán kính OA và OB với nhau thì sẽ được một hình nón có đỉnh là O và đường sinh là OA. Hỏi thể tích của khối nón được tạo thành bằng bao nhiêu? ***(Thi HK1, THPT Nguyễn Du, TP.Hồ Chí Minh, 2016)***



A. $\frac{3125\sqrt{551}\pi}{648}cm^3$. **B.** $\frac{8000\pi}{3}cm^3$. **C.** $\frac{45125\sqrt{215}\pi}{648}cm^3$. **D.** $\frac{1000\sqrt{3}\pi}{3}cm^3$.

Câu 45. Do nhu cầu sử dụng các nguyên liệu thân thiện với môi trường. Một công ty sản suất bóng Tennis muốn thiết kế một hộp làm bằng giấy cứng để đựng 4 quả bóng tennis có bán kính bằng *r*, hộp đựng có dạng hình hộp chữ nhật theo 2 cách như sau:

Cách 1: Mỗi hộp đựng 4 quả bóng tennis được đặt dọc, đáy là hình vuông cạnh 2r, cạnh bên bằng 8r.

Cách 2: Mỗi hộp đựng 4 quả bóng tennis được xếp theo một hình vuông, đáy của hộp là hình vuông cạnh bằng 4r, cạnh bên bằng 2r.

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích toàn phần của hộp theo cách 1 và cách 2.

Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ ***(HK1, Sở GD&ĐT Vĩnh Phúc, 2016)***

A. $\frac{9}{8}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 46. Một thợ thủ công pha khối thạch cao vào nước tạo thành một hỗn hợp có thể tích $V = 330\ cm^3$, sau đó đổ vào khuôn để đúc thành những viên phấn hình trụ có bán kính đáy $R = 0,5\ cm$ và chiều cao $h = 6\ cm$. Biết rằng trong quá trình đúc sự tiêu hao nguyên liệu là không đáng kể. Hỏi người thợ thủ công đó đúc được bao nhiêu viên phấn? ***(Thi HKI, THPT Kim Liên, Hà Nội, 2016)***

A. 50 viên. **B.** 70 viên. **C.** 24 viên. **D.** 23 viên.

Câu 47. Bốn bạn An, Bình, Chi, Dũng lần lượt có chiều cao $1,6m$; $1,65m$; $1,70\ m$; $1,75m$ muốn tham gia trò chơi lăn bóng. Quy định người tham gia trò chơi phải đứng thẳng trong quả bóng hình cầu có thể tích là $0,8\pi\ (m^3)$ và lăn trên cỏ. Bạn nào trong số các bạn trên <u>**không**</u> đủ điều kiện tham gia chơi? ***(Thi HKI, THPT Ansterdam, Hà Nội, 2016)***

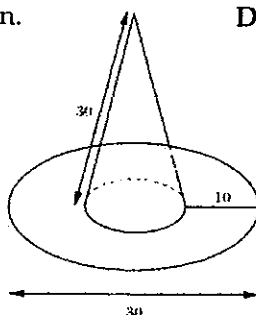
A. Bạn An. **B.** Bạn An và bạn Bình.

C. Bạn Dũng. **D.** Bạn Chi và bạn Dũng.

Câu 48. An có một cốc nước có dạng một hình nón cụt đường kính miệng cốc là 8 (cm), đường kính đáy cốc là 6(cm), chiều cao của cốc là 12 (cm). An dùng cốc đó để đong 10 lít nước. Hỏi An phải đong ít nhất bao nhiêu lần? ***(HK1, THPT Trung Giã, Hà Nội, 2016)***

A. 24 lần **B.** 20 lần . **C.** 22 lần. **D.** 26 lần .

Câu 49. Tính diện tích vải cần có để may một cái mũ có dạng và kích thích (cùng đơn vị đo) được cho bởi hình vẽ bên (không kể riềm, mép) ***(Theo Ngô Minh Ngọc Bảo, 2016)***



A. 350π . **B.** 400π .

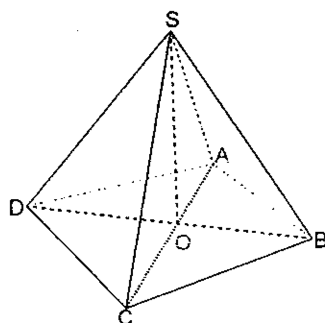
C. 450π . **D.** 500π .

Câu 50. Một cốc nước có dạng hình trụ đựng nước chiều cao 12 cm, đường kính đáy là 4 cm, lượng nước trong cốc cao 10 cm. Thả vào cốc nước 4 viên bi có cùng đường kính 2 cm. Hỏi nước dâng cao cách mép cốc bao nhiêu cm ? ***(THPT Thuận Thành, Bắc Ninh, 2016)***

A. $0,33\ cm$. **B.** $0,67\ cm$. **C.** $0,75\ cm$. **D.** $0,25\,cm$.

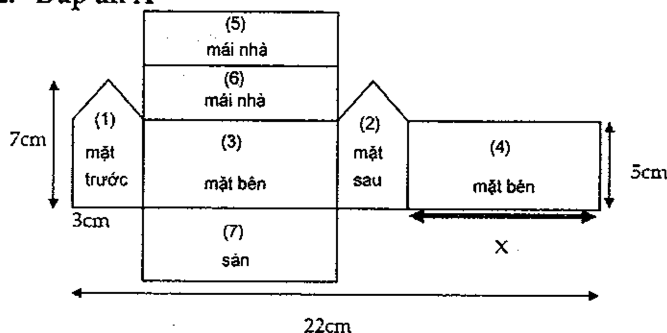
HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

Câu 1: Đáp án B



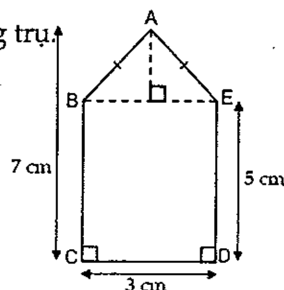
Ta loại phương án (IV) vì 2 khối tứ diện S.ACD và S.ABD có điểm trong chung (phần chung chính là khối tứ diện S.AOD).

Câu 2: Đáp án A



Nhận xét: Chiều dài của ngôi nhà cũng là chiều cao của lăng trụ. Đặt x (cm) là chiều dài ngôi nhà.

Theo bản vẽ, ta có: $3+x+3+x=22 \Leftrightarrow x=8\ (\text{cm})$.



Tiếp theo, ta xét đến mặt trước của ngôi nhà. Tương tự như bài tập 3.40, ta dễ dàng có được diện tích của phần mặt trước:

$S_{ABCDE} = S_{BCDE} + S_{ABE} = 5.3 + \frac{1}{2}.3.(7-5) = 18\ (cm^2)$

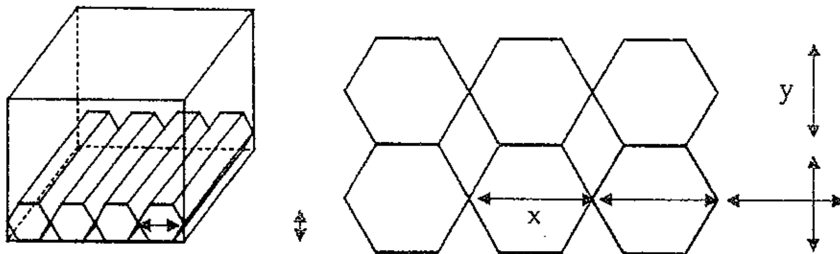
Vậy thể tích mô hình ngôi nhà là: $V = S_{ABCDE}.x = 18.8 = 144\ (cm^3)$.

Câu 3: Đáp án C.

Số lần rót nước vào bình cũng là tỉ số thể tích V_1, V_2 của bình và gạo: $\frac{V_1}{V_2} = $ [illegible] $\approx 9,37$ suy ra số lần cần rót nước là 10 lần.

Câu 4: Đáp án B

Phân tích: Độc giả có thể nhầm tưởng rằng số bút chì xếp được vào hộp bằng tỉ số thể tích của chiếc hộp và một cây bút, nhưng thực chất khi sắp xếp bút chì vào hộp, tùy cách sắp xếp sẽ cho ta số lượng khác nhau.



Nhận xét: 2 độ dài x và y trên hình lần lượt cho ta biết có thể xếp được bao nhiêu cây bút chì theo chiều ngang và chiều dọc. Để tìm được x và y, ta cần xác định độ dài cạnh của lục giác đều.

Cây bút chì có hình dạng là một khối lăng trụ lục giác đều với thể tích $\frac{1875\sqrt{3}}{2} mm^3$ và chiều dài 10 cm (thực chất chính là chiều cao của khối lăng trụ). Từ đây ta xác định được diện tích đáy: $B = \frac{V}{h} = \frac{\frac{1875\sqrt{3}}{2}}{100} = \frac{75\sqrt{3}}{8}\ (mm^3)$.

Gọi a (mm) là độ dài cạnh đáy của cây bút chì, ta có công thức diện tích của đáy bút chì là $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\ (mm^2)$ (tham khảo bài 3.35).

Từ đây, ta tìm được độ dài cạnh của lục giác đều $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{75\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow a = \frac{5}{2} = 2,5\ (mm)$.

Suy ra: $x = 2a = 5\ (mm)$; $y = a\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ (mm)$ (tham khảo bài 3.39).

Dựa trên kích thước của chiếc hộp, ta có số cây viết xếp được theo chiều ngang là $\frac{60}{x} = 12$ (cây bút) và theo chiều dọc là $\frac{60}{y} = 8\sqrt{3} \approx 13,86$ hay nói cách khác 13 cây bút (dù kết quả là 13,86 thì cũng chỉ xếp được tối đa 13 cây bút).

Vậy tổng số bút chứa được trong hộp là: 12.13 = 156 cây bút.

Câu 5: Đáp án B

Các em đã biết cách tính diện tích của một lục giác đều, và với ngũ giác đều ta làm hoàn toàn tương tự. Một ngũ giác đều được chia thành 5 tam giác cân với góc ở đỉnh là $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Từ đây ta tính được diện tích của các miếng da thành phần.

Diện tích miếng da ngũ giác đều: $S_1 = 5.\left(\frac{1}{2}.4,5.\frac{4,5}{2}.\tan 54^\circ\right) = \frac{405}{16}.\tan 54^\circ\ \left(cm^2\right)$.

Diện tích miếng da lục giác đều: $S_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.4,5^2 = \frac{243\sqrt{3}}{8}\ \left(cm^2\right)$.

[redacted]

Câu 6: Đáp án C

Nhận xét: Độ dài cạnh hộp cũng là đường kính quả bóng.

Gọi d (cm) là độ dài cạnh hộp, ta có công thức tính diện tích quả bóng:

$S = 4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi d^2$.

Vì diện tích quả bóng hình cầu bằng diện tích quả bóng da ở câu trên nên ta có:

$\pi d^2 = \frac{1215}{4}\tan 54^\circ + \frac{1215\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow d \approx 10,82(cm)$.

Câu 7: Đáp án D.

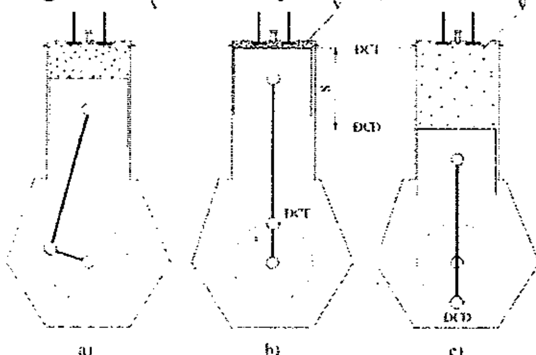
[redacted]

Suy ra nước không tràn khỏi bình.

Để xác định độ tăng chiều cao mực nước, ta chỉ cần lấy độ tăng thể tích chia cho diện tích đáy bình: $h = \frac{108}{\pi.25} \approx 1,38\ (cm)$.

Câu 8: Đáp án B.

Sự chênh lệch thể tích của buồng đốt cũng chính là thể tích của một khối trụ có chiều cao bằng 2r và bán kính đáy là d/2 (xem hình b và c).



a) b) c)

Do vậy ta có: $V_1 - V_2 = \pi.3^2.(2.2) = 36\pi \left(cm^3\right)$.

Câu 9: Đáp án C.

Nhận xét:

[redacted]

Với việc V_2 là tổng thể tích của 2 thùng khi gò theo cách 2 thì ta có $\frac{V_1}{V_2} = 2$.

Câu 10: Đáp án A.

Đổi số đo: 10 ft = 3m; 5 ft = 1,5m.

Gọi V_1, V_2, V_3 $\left(m^3\right)$ lần lượt là thể tích của 2 phần hình nón và phần hình trụ.

Thể tích của mỗi phần dạng khối nón: $V_1 = V_2 = \frac{1}{3}.\pi.1,5^2.1,5 = \frac{9}{8}\pi \left(m^3\right)$.

Thể tích của phần khối trụ: $V_3 = \pi.1,5^2.3 = \frac{27}{4}\pi \left(m^3\right)$.

Tổng thể tích của bồn chứa: $V_1 + V_2 + V_3 = 9\pi \left(m^3\right)$.

Câu 11: Đáp án D.

[redacted]

Suy ra $V_2 < V_3 < V_1$.

Câu 12: Đáp án A.

Nhận xét: Trong 3 khối thì chỉ có khối nửa cầu là ta biết rõ chiều cao (cũng là bán kính). Từ đây ta suy ra được thể tích chung của cả 3 khối.

Đặt R là bán kính đáy của cả 3 khối, thể tích của mỗi khối là: $V = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$.

Diện tích bề mặt của gáo hình nửa cầu cũng là diện tích xung quanh của khối nửa cầu: $S_3 = \frac{1}{2}.4\pi.R^2 = 2\pi R^2$.

Ta xét đến khối trụ, để xác định diện tích bề mặt của gáo khối trụ, ta cần biết được chiều cao h_1 của nó: $\pi R^2 h_1 = V \Leftrightarrow h_1 = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{2}{3}R$.

Diện tích bề mặt của gáo khối trụ là diện tích xung quanh và diện tích 1 đáy của khối trụ tương ứng: $S_1 = 2\pi Rh_1 + \pi R^2 = \frac{7}{3}\pi R^2$.

Tiếp theo, ta xét đến khối nón. Để tính diện tích bề mặt của khối nón ta cần biết độ dài đường sinh k, nhưng trước hết là chiều cao h_2 của khối:

[redacted]

Nhận xét: $S_3 < S_2 < S_1$.

Câu 13: Đáp án B.

Theo bài 3.53, diện tích vỏ hộp nhỏ nhất khi $a = b = c = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{330} \approx 6,91\ (\text{cm})$.

Câu 14: Đáp án A.

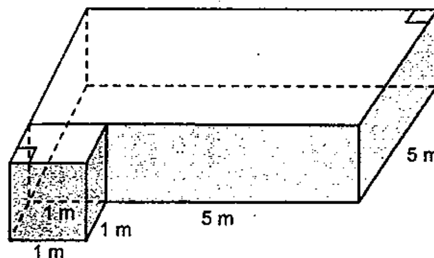
Theo bài 3.53, diện tích vỏ hộp nhỏ nhất khi $R = \sqrt[3]{\frac{V}{4}};\ h = \sqrt[3]{2V}$.

Câu 15: Đáp án C.

Ta có thể chia tủ bếp thành 1 khối lập phương và 1 khối hộp chữ nhật có kích thước 6m x 5m x 1m.

Như vậy, thể tích của tủ bếp bằng tổng thể tích của 2 khối này:

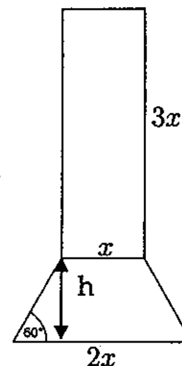
$1^3 + 6.5.1 = 31\ (m^3)$



Câu 16: Đáp án D.

Nhận xét

- Hình chiếu của ống khói gồm một hình chữ nhật có chiều dài là 3x, chiều rộng là x và một hình thang cân có độ dài 2 đáy là x và 2x.
- Do khối chóp cụt tứ giác đều có 2 đáy đều là hình vuông nên ta thấy một mặt của khối hộp chữ nhật là hình vuông cạnh x (mặt tiếp xúc của 2 khối). Từ đây ta có 3 kích thước của khối hộp chữ nhật là x, x, và 3x.
- Đối với khối chóp cụt tứ giác đều, 2 đáy lần lượt có độ dài cạnh là x và 3x. Nếu ta gọi h là chiều cao của hình thang cân trong hình thì h cũng đồng thời là chiều cao của khối chóp cụt.



Giải

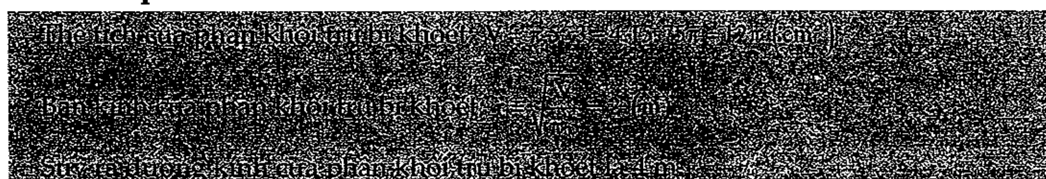
Thể tích phần ống dạng khối hộp chữ nhật: $V_2 = x.x.3x = 3x^3$.

Dựa theo công thức ở bài 3.37, ta tính được thể tích phần khối chóp cụt:

$V_1 = \frac{1}{3}.h\left(x^2 + x.2x + (2x)^2\right) = \frac{1}{3}.\left(\frac{x}{2}.\tan 60^\circ\right).7x^2 = \frac{7\sqrt{3}}{6}x^3.$

Vậy tỉ số thể tích: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7\sqrt{3}}{18}.$

Câu 17: Đáp án B.



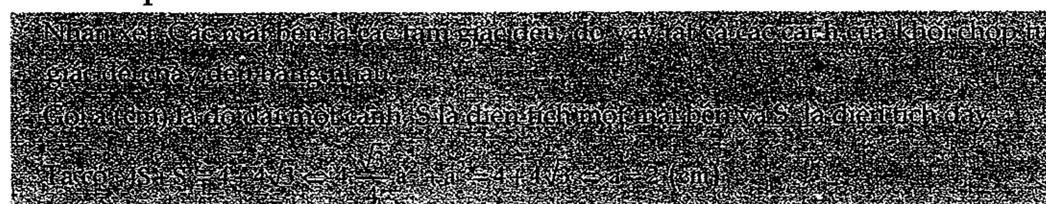
[redacted]

Câu 18: Đáp án C.

Nhận xét: Khối tứ diện đều tạo thành sẽ có độ dài cạnh là 4cm.

Từ đây ta tìm được chiều cao và diện tích đáy của khối tứ diện đều (tham khảo bài 3.56), và có được thể tích của khối tứ diện đều là $\frac{8\sqrt{3}}{3}\ \left(cm^3\right)$.

Câu 19: Đáp án B.



[redacted]

Thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh bằng 2 (cm) là $\frac{4\sqrt{2}}{3}\ \left(cm^3\right)$. (tham khảo bài 3.57)

Câu 20: Đáp án C.

Với độ dài cạnh của khối chóp tứ giác đều là a = 2 (cm), gọi m, n (cm) lần lượt là chiều dài và chiều rộng của miếng bìa hình chữ nhật.

Chiều rộng miếng bìa bằng 2 lần độ dài cạnh khối chóp: n = 2a = 4 (cm).

Chiều dài miếng bìa bằng tổng của 2 lần độ dài đường cao một mặt bên và độ dài một cạnh khối chóp: $m = 2.\left(2^2.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 = 2 + 4\sqrt{3}\ (cm)$.

Diện tích miếng bìa hình chữ nhật: $m.n = 8 + 16\sqrt{3}\ \left(cm^2\right)$.

Câu 21: Đáp án D.

Câu 22: Đáp án A.

Chỉ có hình (I) có thể ghép thành khối lập phương.

Câu 23: Đáp án C.

Tham khảo bài 3.16.

Câu 24: Đáp án B.

<u>Nhận xét</u>: Khi đổ nước vào trong bể thì nước sẽ dâng đầy phần nón trước rồi sau đó mới đến phần trụ. Như vậy ở đây ta xét hai giai đoạn:

(I) Từ lúc bắt đầu đổ nước đến khi nước dâng đầy phần khối nón.

(II) Từ lúc nước bắt đầu dâng vào phần khối trụ đến lúc đầy bể.

Ta xét quá trình (I): Khi nước dâng trong phần khối nón, cứ mỗi giây trôi qua, lượng nước trong bể lại tạo thành một khối nón nhỏ hơn có bán kính đáy là r(t) và chiều cao (cũng là chiều cao mực nước) là h(t). (t là thời gian, tính theo giây)

Dễ thấy: $\frac{h}{1,5}=\frac{r}{0,5}\Rightarrow r=\frac{h}{3}$.

Ở thời điểm t, ta có: $V(t)=\frac{1}{3}\pi r^2h\Leftrightarrow t=\frac{1}{27}\pi h^3\Leftrightarrow h=\sqrt[3]{\frac{27t}{\pi}}$. (mỗi giây lượng nước bơm vào là 1 lít nên trong t (giây) là t (lít))

Vậy sự thay đổi chiều cao của mực nước trong giai đoạn (I) được cho bởi hàm:

$h(t)=\sqrt[3]{\frac{27t}{\pi}}$

[redacted]

Vậy đáp án là B.

Câu 25: Đáp án A.

Hình quạt có bán kính 7 cm và độ dài cung là $\frac{7}{3}\pi$ cm.

Độ dài cung của hình quạt cũng là chu vi đáy của hình nón, như vậy gọi là r (cm) là bán kính đáy của nón, ta có: $2\pi r=\frac{7}{3}\pi\Leftrightarrow r=\frac{7}{6}$ (cm).

[redacted]

Câu 26: Đáp án C.

Bán kính miếng bìa chính là độ dài đường sinh l của mỗi chiếc nón, vậy $l=20$ (cm).

Độ dài cung của mỗi hình quạt là chu vi đáy của chiếc nón. Gọi r (cm) là bán kính đáy của mỗi chiếc nón: $2\pi r=\frac{2\pi l}{4}=\frac{2\pi.20}{4}\Leftrightarrow r=5$ (cm).

Gọi h (cm) là chiều cao của mỗi chiếc nón: $h=\sqrt{l^2-r^2}=5\sqrt{15}$ (cm)

Thể tích mỗi chiếc nón là: $V=\frac{1}{3}.\pi r^2.h=\frac{1}{3}.\pi.5^2.5\sqrt{15}=\frac{125\sqrt{15}}{3}\pi\ (cm^3)$.

Tổng thể tích của 4 chiếc nón là: $4V=\frac{500\sqrt{15}}{3}\pi\ (cm^3)\approx 2,03$ (lít).

Câu 27: Đáp án A.

Cách giải 1:

Ta có thể tìm được các thể tích V_1, V_2, V, V' một cách nhanh chóng.

__Phương án 1__: Chia hình tròn thành 3 phần.

Độ dài đường sinh của mỗi chiếc nón cũng là bán kính hình tròn ban đầu, tức 16 cm.

Bán kính của mỗi chiếc nón sẽ bằng 1/3 bán kính ban đầu, tức $\frac{16}{3}(\text{cm})$.

[redacted]

__Phương án 2__: Chia hình tròn thành 6 phần.

Bán kính của mỗi chiếc nón sẽ bằng 1/6 bán kính ban đầu, tức $\frac{8}{3}(\text{cm})$.

Ta tìm được chiều cao của mỗi chiếc nón: $\sqrt{16^2 - \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{35}}{3}(\text{cm})$.

Thể tích V_2 của mỗi chiếc nón: $V_2 = \frac{1}{3}.\left(\pi.\left(\frac{8}{3}\right)^2\right).\frac{8\sqrt{35}}{3} = \frac{512\sqrt{35}}{81}\pi\ (\text{cm}^3) \approx 117,48(\text{cm}^3)$

Tổng thể tích V′ của 3 chiếc nón: $V' = 6V_2 \approx 704,89\ (\text{cm}^3)$.

Cách giải 2: Tổng quát hóa bài toán.

Chia một hình tròn bán kính R thành x hình quạt bằng nhau ($x \in \mathbb{N}^*, x > 1$), sau đó cuộn mỗi hình quạt lại tạo thành một hình nón có thể tích V, và tổng thể tích của các hình nón là V′.

[redacted]

__Thể tích của mỗi khối nón__: $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{x}\right)^2.\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{x}\right)^2} = \frac{R^3\pi}{3}.\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}$.

Dễ dàng khảo sát thấy hàm số $V(x) = \frac{R^3\pi}{3}.\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$,

và như vậy với mọi giá trị $x \in \mathbb{N}^*, x > 1$ thì ta luôn có V(x) > V(x+1).

Hay nói cách khác, càng chia nhỏ hình tròn thì thể tích mỗi khối nón tạo thành càng bé.

<u>**Tổng thể tích của các khối nón**</u>: $V' = x.V = \frac{R^3\pi}{3}.\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}.a$

Khảo sát hàm số $V'(x) = \frac{R^3\pi}{3}.\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}$, ta cũng có kết quả tương tự như trên, nghĩa là càng chia nhỏ hình tròn thì tổng thể tích các khối nón tạo thành càng bé.

Câu 28: Đáp án C.

Đặt α $\left(0^0 < \alpha < 360^0\right)$ là số đo cung tròn dùng làm nón.

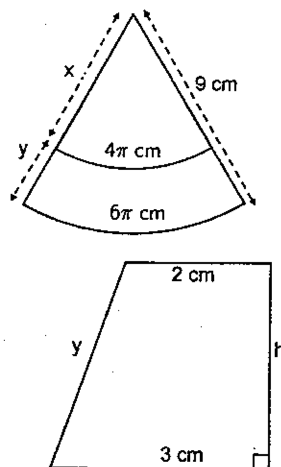
Ta dễ dàng xác định được bán kính đáy của nón: $r = \frac{\alpha}{360}.R$;

[redacted]

Khảo sát hàm này, ta tìm được hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x \approx 294$, hay nói cách khác, thể tích nón đạt giá trị lớn nhất khi $\alpha \approx 294^0$.

Vậy số đo của cung tròn bị cắt đi là: $360^0 - \alpha = 66^0$.

Câu 29: Đáp án B.



Xét các kích thước x và y như trên hình, trong đó y chính là độ dài đường sinh của khối nón cụt.

Bán kính đáy nhỏ và đáy lớn của khối nón cụt lần lượt là $r = 2$ cm và $r' = 3$ cm.

Để tính được thể tích của khối nón, ta cần tìm được chiều cao của khối nón cụt. Như đã biết, một khối nón cụt tạo ra bằng cách xoay một hình thang vuông quanh cạnh góc vuông của nó. Vì vậy, độ dài cạnh góc vuông chính là chiều cao h của khối nón cụt.

Như ta thấy, muốn tìm được h, ta cần tìm được y trước.

Dễ dàng chứng minh được $\frac{x}{9} = \frac{4\pi}{6\pi}$, suy ra $x = 6$ cm và $y = 3$ cm.

[redacted]

Câu 30: Đáp án A.

Gọi r_1, r_2, r_3 (cm) lần lượt là bán kính của 3 đường tròn màu cam, màu đỏ và màu xanh.

Dễ dàng tính được $r_1 = \frac{4}{2} = 2$ (cm); $r_2 = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$ (cm); $r_3 = \frac{4+3+2}{2} = \frac{9}{2}$ (cm).

Gọi h_1, h_2, h_3 (cm) lần lượt là chiều cao của 3 khối nón có đáy là các đường tròn bán kính r_1, r_2, r_3 với các đường sinh tương ứng lần lượt là 4cm, 7cm, 9cm.

[redacted]

Thể tích V của khối nón có bán kính đáy r_2: $V = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{343\sqrt{3}}{24}\pi$ (cm^3).

Thể tích V_2 của khối nón cụt là hiệu thể tích V và V_1: $V_2 = V - V_1 = \frac{93\sqrt{3}}{8}\pi$ (cm^3).

Tương tự, ta tìm được thể tích V_3 của khối nón cụt dưới cùng: $V_3 = \frac{193\sqrt{3}}{12}\pi$ (cm^3).

Câu 31: Đáp án C.

Gọi h, r (m) lần lượt là chiều cao và bán kính đáy bể.

Theo đề bài, ta có: $\pi r^2.h = 150 \Leftrightarrow r^2h = \frac{150}{\pi}$.

[redacted]

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 220000\pi r^2 = 90000\pi rh \Leftrightarrow h = \frac{22}{9}r \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{\frac{675}{11\pi}} \text{ (m)} \\ h = \frac{22}{9}\sqrt[3]{\frac{675}{11\pi}} \text{ (m)} \end{cases}$

Câu 32: Đáp án B.

Trong 1 giây, thể tích nước tăng thêm là 10 lít.

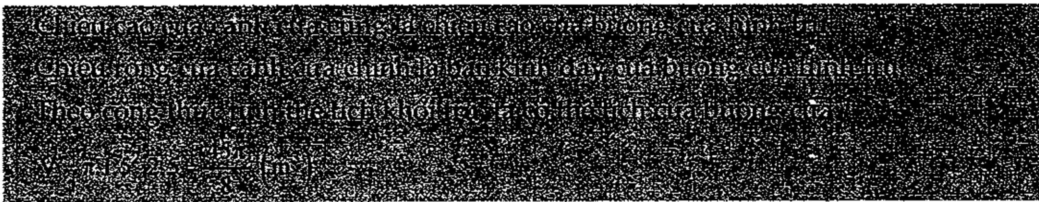
Chiều cao mực nước tăng lên trong một giây là: $\frac{\frac{10}{1000}t}{10.5} = \frac{1}{5000}t$ (m), trong đó t là thời gian, đo bằng giây.

Dựa trên thông tin ban đầu trong hồ đã có sẵn 200 lít nước, tức mực nước ban đầu là $\frac{1}{250}$ (m).

Như vậy ta có hàm số thể hiện chiều cao của mực nước ở mỗi thời điểm như sau:

$h(t)=\frac{1}{5000}t+\frac{1}{250}$ (m).

Câu 33: Đáp án A.


[redacted]

Câu 34: Đáp án D.

Thể tích của khối nón cụt:

$V_1=\frac{1}{3}\pi h\left(r^2+rR+R^2\right)=\frac{1}{3}\pi.10\left(5^2+5.1,5+1,5^2\right)=\frac{695\pi}{6}\ \left(cm^3\right).$

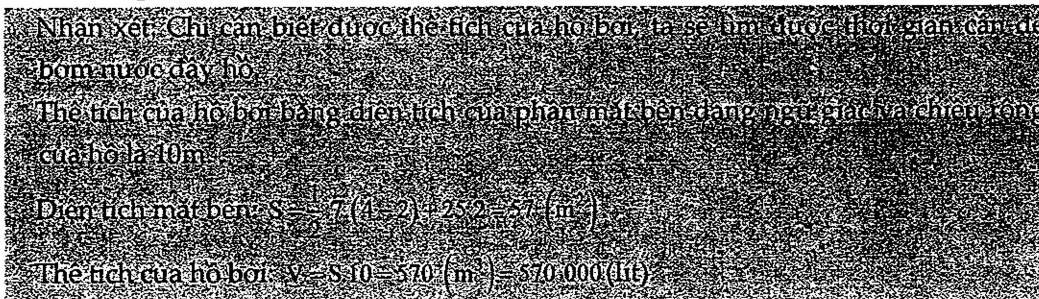
Thể tích của khối trụ: $V_2=\pi.r^2.h_2=\pi.1,5^2.3=\frac{27\pi}{4}\ \left(cm^3\right).$

Tổng thể tích của bình: $V=V_1+V_2=\frac{1471\pi}{12}\ (ml).$

Thể tích sỏi cần bỏ vào: $V-100=\frac{1471\pi-1200}{12}\ (ml).$

Số viên sỏi cần bỏ vào: $\frac{V-100}{12}\approx 24$ (viên).

Câu 35: Đáp án C.


[redacted]

Thời gian cần thiết để bơm nước đầy hồ: $\frac{570000}{100}=5700$ (giây) = 1 giờ 35 phút.

Câu 36: Đáp án B.

Nhận xét: Để chiếc lon trà đặt vừa khít trong hộp thì đáy của hộp tiếp giáp với đáy lon phải có dạng là một hình vuông. Hơn nữa, hình vuông này có độ dài cạnh a bằng đường kính đáy lon là 2R.

Gọi V, V′ lần lượt là thể tích lon trà và thể tích hộp quà, ta có:

$\frac{V}{V'}=\frac{\pi R^2h}{a^2h}=\frac{\pi R^2}{a^2}=\frac{\pi R^2}{4R^2}=\frac{\pi}{4}\approx 78,54\%$. (trong đó h là chiều cao hộp, cũng là chiều cao lon).

Câu 37: Đáp án A.

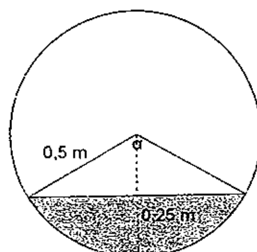
Nhận xét: Ta cần tìm chiều cao của bồn nước (A) thông qua chiều cao của thiết bị (B).

Dựa vào hình vẽ, ta thấy thể tích nước trong (B) gồm thể tích cột nước hình hộp chữ nhật đứng có đáy là hình vuông cạnh 2 cm và một khối hộp chữ nhật ngang có kích thước $4cm \times 2cm \times 2cm$.

Từ đây ta tìm được chiều cao của cột nước là $h = \frac{616 - 4.2.2}{2.2} = 150\ (cm)$.

Bán kính đáy bồn: $R = \sqrt{\frac{375000\pi}{150.\pi}} = 50\ (cm)$.

Câu 38: Đáp án C.



Nhận xét: Thể tích của bồn nước bằng tích của chiều cao bồn (bằng 2m) và diện tích một phần hình tròn đáy, mà cụ thể ở đây là hình viên phân. Bởi lẽ diện tích hình viên phân sẽ được tính theo những cách khác nhau dựa vào số đo cung tương ứng nên ở đây ta cần đánh giá các số liệu của đề bài một cách cẩn thận.

Ở đây, chiều cao h của mực nước là 0,25 m, như vậy nước dâng lên chưa quá nửa bồn. Từ đây ta thấy diện tích hình viên phân sẽ bằng hiệu diện tích của hình quạt và hình tam giác tương ứng như trên hình.

Gọi số đo cung của hình quạt là α, ta có: $h = R - R.\cos\frac{\alpha}{2} = R\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)$

Suy ra: $0,25 = 0,5\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \alpha = 120^0$.

Ta tìm diện tích hình viên phân:

$$S_{vp} = S_{quat} - S_{\Delta} = \frac{\alpha}{360^0}.\pi R^2 - \frac{R^2 \sin\alpha}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\ (m^2)$$

Thể tích nước trong bồn là: $V = S_{vp}.2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 307,09\ (lít)$.

Câu 39: Đáp án B.

Diện tích hình viên phân đáy: $S_{vp} = \frac{1,264}{2} = 0,632\ (m^2)$.

Diện tích S′ của nửa hình tròn đáy: $S' = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{\pi}{8}\ (m^2) < 0,632\ m^2$.

Như vậy, nước đã dâng quá nửa bồn. Ta có thể đưa bài toán này về lại dạng của bài 38 bằng cách tính diện tích của hình viên phân nhỏ còn lại:

$$S_{vp2} = \pi R^2 - S_{vp} = \frac{125\pi - 316}{500}\ (m^2).$$

Theo bài 38, gọi số đo cung của hình viên phân nhỏ là α (tính theo radian), ta có:

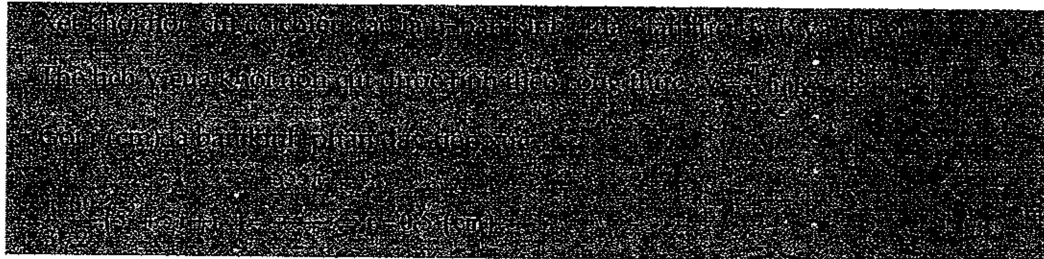
$$S_{vp} = S_{quat} - S_{\Delta} = \frac{\alpha}{2\pi}.\pi R^2 - \frac{R^2 \sin\alpha}{2} = \frac{1}{8}(\alpha - \sin\alpha)$$

Giải phương trình: $\frac{1}{8}(\alpha - \sin\alpha) = \frac{125\pi - 316}{500}$ (1)

Sử dụng máy tính bỏ túi, ta tìm được một nghiệm $\alpha \approx 2,09\ (rad) \approx 120^0$.

Như vậy phần không gian trống trong bồn sẽ có độ cao 0,25m, hay nói cách khác, độ cao mực nước là 0,75 m.

Câu 40: Đáp án B.


[redacted]

Câu 41: Đáp án A.

Gọi $r(r<3)$ là bán kính của viên bi. Khi đó thể tích của $V_{bi}=\frac{4}{3}\pi r^3$

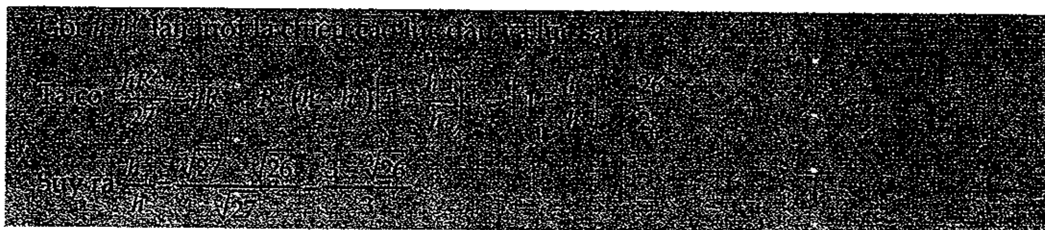
Khi đó thể tích dâng lên $V_{tru\ dang\ len}=(2r-4,56)\pi\left(\frac{12,24}{2}\right)^2$

Thể tích nước dâng lên trong hình trụ chính là thể tích của viên bi mà ta thả vào.

Do đó $V_{bi}=V_{tru\ dang\ len}\Leftrightarrow(2r-4,56)\pi\left(\frac{12,24}{2}\right)^2=\frac{4}{3}\pi r^3$

$$\Leftrightarrow 0,035r^3-2r+4,56=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}r\approx 2,58\\ r\approx -8,511.\\ r\approx 5,93\end{array}\right.$$

Câu 42: Đáp án D.


[redacted]

Câu 43: Đáp án B.

Ta có cạnh đáy của khối tứ diện là $a=\frac{x}{2}=1\ (cm)$ và khi đó thể tích bằng $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{12}\ (cm^3)$.

Câu 44: Đáp án A.

Gọi r là bán kính của hình nón, ta có $AB=2\pi r=R\alpha\Rightarrow r=\frac{R.\frac{75\pi}{180}}{2\pi}=\frac{25}{6}$

Khi đó $V=\frac{1}{3}h\pi r^2=\frac{1}{3}\sqrt{R^2-r^2}\pi r^2=\frac{3125\sqrt{551}}{648}\pi\left(cm^3\right)$

Câu 45: Đáp án A.

Xét tỉ số: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\left(4r^2\right)+4.(2r)(8r)}{2\left(16r^2\right)+4.(2r)(4r)}=\frac{9}{8}$

Câu 46: Đáp án B.

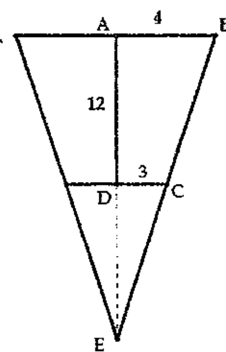

[redacted]

Câu 47: Đáp án D.

Ta có thể tích của quả cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx 0,843 \Rightarrow d = 2R \approx 1,69\ (m)$

So sánh chiều cao của 4 bạn ta thấy bạn Chi (1,70m) và bạn Dũng (1,75m) không đủ điều kiện tham gia trò chơi.

Câu 48: Đáp án C



Gọi ABCD là các điểm như hình vẽ. Đặt $h = AE$

Ta có $\frac{h-12}{h} = \frac{3}{4} \Rightarrow h = 18\ (cm)$

Do đó $V_{coc} = \frac{1}{3}\pi h R^2 - \frac{1}{3}\pi(h-12)Rr^2 \approx 465\ ml$

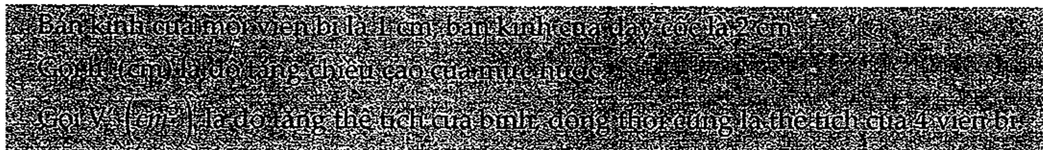
Gọi n là số lần đong ta có $n = \frac{10}{0,465} \approx 21,5$ (lần)

Chọn 22 lần.

Câu 49: Đáp án A

Ta có $S = \pi R_1 l + \pi\left(R_1^{\,2} - R_2^{\,2}\right) = \pi 5.30 + \pi\left(15^2 - 5^2\right) = 350\pi$

Câu 50: Đáp án B


[redacted]

Ta có:

$V' = \pi.2^2.h' = 4\pi h'$

$V' = 4.\frac{4}{3}.\pi.1^3 = \frac{16}{3}\pi$

Suy ra: $h' = \frac{4}{3}\ (cm)$.

Khoảng cách từ mực nước mới đến mép cốc là: $2 - h' = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\ (cm) \approx 0,67(cm)$.

CHƯƠNG IV. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ NHỮNG BÀI TOÁN THỰC TẾ

Các em học sinh thân mến, có bao giờ các em đã nghe câu chuyện về ***bài toán cân voi*** *của trạng nguyên Lương Thế Vinh? Vào đời vua Lê Thánh Tông, một quan sứ của Trung Quốc là Chu Hy sang Việt Nam ta với thái độ hống hách và coi thường đất nước Việt Nam ta. Chu Hy đã thách đố nước ta làm sao để cân được khối lượng con voi. Vào thời ấy, không thể có loại cân nào đủ lớn để cân khối lượng con voi lên hàng tấn. Dĩ nhiên là ta không thể xẻ thịt con voi để cân được. Vậy thì Trạng nguyên Lương Thế Vinh đã cân voi bằng cách nào?*



Chuyện kể rằng Trạng nguyên Lương Thế Vinh đã sai quân lính dẫn con voi lên thuyền, do voi nặng nên thuyền đắm sâu xuống, Lương Thế Vinh cho quân lính đánh dấu mực nước trên thành thuyền, rồi dắt voi lên bờ. Sau đó, ông sai quân lính vác đá bỏ lên thuyền cho đến khi thuyền đắm sâu tới mức đã đánh dấu lúc nãy thì dừng lại. Cuối cùng, ông bảo quân lính cân hết số đá trên thuyền và ra được khối lượng con voi. Khi ấy, Chu Hy tuy bực tức nhưng trong lòng rất thán phục.

Cách cân voi của trạng nguyên Lương Thế Vinh mang "hơi hướng" của phép tính tích phân hiện đại ngày nay. Để tính khối lượng của con voi, Lương Thế Vinh đã chia thành nhiều phần nhỏ (là những viên đá) rồi tính tổng khối lượng các viên đá ấy. Trong thực tế ngày nay ta cũng gặp nhiều vấn đề tương tự như bài toán cân voi. Ví dụ để tính diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật, hay hình vuông, hay hình tròn là chuyện dễ dàng. Tuy nhiên, sẽ khó khăn hơn nhiều khi tính diện tích của mảnh vườn có hình dạng phức tạp, bằng cách chia nhỏ hình phức tạp ấy thành nhiều hình đơn giản quen thuộc, sau đó tính tổng diện tích các hình đơn giản ấy sẽ cho kết quả của hình phức tạp ban đầu. Qua đó ta thấy phép tính tích phân hiện đại sẽ giúp cho chúng ta giải quyết các bài toán trên một cách đơn giản hơn.

Không dừng lại ở đó, phép tính tích phân phát huy ưu thế của nó qua nhiều ứng dụng rất thực tế:

- *Tính thể tích của vật thể có hình dạng phức tạp (không phải là hình hộp đã có sẵn công thức tính).*
- *Tính được quãng đường chuyển động của vật (xe, máy bay,...) khi biết được vận tốc trong suốt quãng đường ấy.*
- *Dự đoán được sự phát triển của bào thai.*
- *Dự đoán được chi phí sản xuất và doanh thu của doanh nghiệp.*
- *Và còn rất nhiều các ứng dụng khác...*

Tuy nhiên, trong chương trình sách giáo khoa lớp 12 hiện nay chỉ thiên về những bài tính toán khô khan, học sinh chỉ biết tính toán một cách máy móc mà không thấy được những ứng dụng thực tế của nó. Với xu thế đổi mới cách đánh giá năng lực học sinh thì những bài toán

ứng dụng thực tế của tích phân đang là chủ đề nóng và rất cần thiết cho những học sinh đang chuẩn bị cho kì thi THPT Quốc gia. Trong chương này, chúng ta sẽ làm quen với những bài toán thực tế áp dụng phép tính tích phân theo định hướng ra đề của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Nội dung chương này bao gồm:

- ***Phần A: Tóm tắt lý thuyết và các kiến thức liên quan.***
- ***Phần B: Các bài toán ứng dụng thực tế.***
- ***Phần C: Các bài toán trắc nghiệm khách quan.***
- ***Phần D: Đáp án và hướng dẫn giải câu hỏi trắc nghiệm.***

PHẦN A: TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Nguyên hàm

1. Khái niệm nguyên hàm

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu

  $F'(x)=f(x), \forall x \in K$.
- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K là

  $\int f(x)dx=F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$.
- Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

2. Tính chất

Cho các hằng số $C, k\in\mathbb{R}$.

$\int f'(x)dx=f(x)+C$

$\int [f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

$\int k.f(x)dx=k\int f(x)dx,\ (k\neq 0)$

3. Nguyên hàm của một số hàm thường gặp

- **Cho** $a,b,c,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **là hằng số**

▪ $\int 0dx=c$	▪ $\int (ax+b)^{\alpha}dx=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\ (\alpha\neq -1, a\neq 0)$
▪ $\int dx=x+c$	▪ $\int \frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+c,\ (a\neq 0)$
▪ $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\ (\alpha=const, \alpha\neq -1)$	▪ $\int \cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c,\ (a\neq 0)$
▪ $\int \frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+c$	▪ $\int \sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c,\ (a\neq 0)$
▪ $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+c$	▪ $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx=\frac{1}{a}\tan(ax+b)+c,\ (a\neq 0)$
▪ $\int \cos xdx=\sin x+c$	
▪ $\int \sin xdx=-\cos x+c$	

▪ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$	▪ $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c,\ (a \neq 0)$
▪ $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$	▪ $\int a^{\alpha x+\beta}dx = \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\alpha \ln a},\ (0 < a \neq 1, \alpha \neq 0)$
▪ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c\ \ (0 < a \neq 1)$	▪ $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c,\ (a \neq 0)$
▪ $\int e^x dx = e^x + c$	
▪ $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$	
▪ $\int \frac{1}{x\ln a}dx = \log_a \lvert x\rvert + c\ \ (0 < a \neq 1)$	

II. Tích phân

1. Khái niệm tích phân



- Đối với biến số, ta có thể chọn bất kì một chữ khác thay cho x, tức là

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$$

2. Tính chất của tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $k \in \mathbb{R}$, $c \in (a;b)$.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

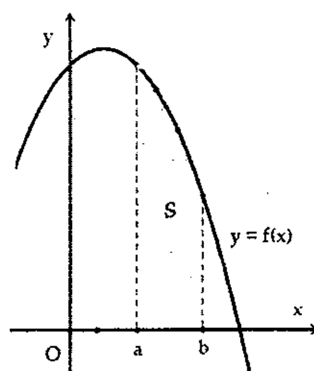
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx.$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

III. Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng.

1. Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi một đường cong (C) và trục hoành

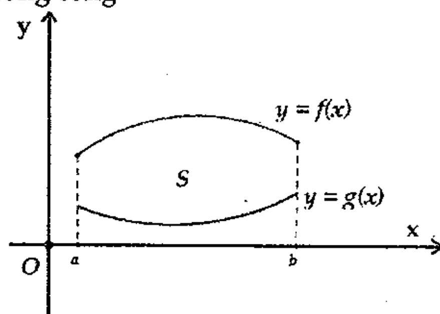


$$(H): \begin{cases} y = f(x)\ (C) \\ y = 0 \\ x = a, x = b\ (a < b) \end{cases}.$$

Diện tích được tính theo công thức $\boxed{S = \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx}$

2. Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi 2 đường cong

$$(H):\begin{cases} y=f(x)\ (C_1) \\ y=g(x)\ (C_2) \\ x=a \\ x=b\,(a<b) \end{cases}$$



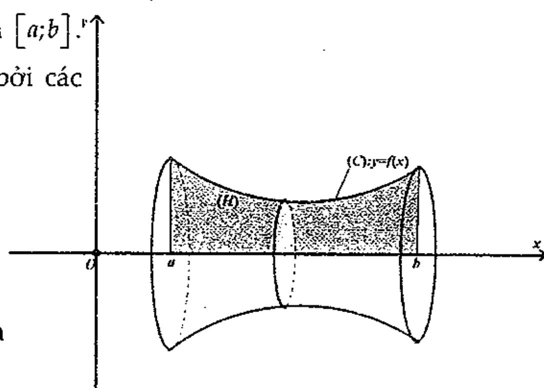
Diện tích được tính theo công thức

$$\boxed{S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx}$$

IV. Ứng dụng tích phân tính thể tích khối tròn xoay

1. Cho hàm $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi (H) là hình thang cong giới hạn bởi các đường sau:

$$(H):\begin{cases} (C): y=f(x) \\ y=0 \\ x=a \\ x=b\,(a<b) \end{cases}$$

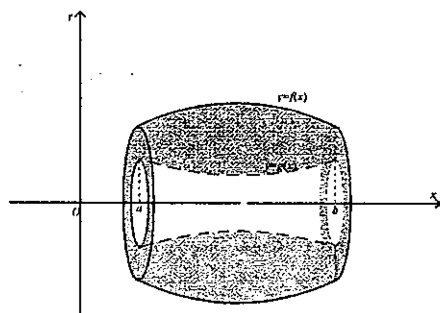


Thể tích khối tròn xoay được sinh ra do hình (H) xoay quanh trục Ox.

$$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)dx}$$

2. Cho 2 hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cùng liên tục trên đoạn $[a;b]$ và thỏa điều kiện $f(x)\ge g(x)\ge 0, \forall x\in[a;b]$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

$$(H):\begin{cases} (C): y=f(x) \\ (C'): y=g(x) \\ x=a \\ x=b\,(a<b) \end{cases}$$



Thể tích khối tròn xoay được sinh ra do hình phẳng (H) quay quanh trục Ox:

$$\boxed{V=\pi\int_a^b \left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx}$$

PHẦN B: CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG THỰC TẾ

1. Với một đại lượng $f(x)$ biến thiên theo biến số x thì tốc độ thay đổi (vận tốc) của $f(x)$ theo biến x chính là đạo hàm $f'(x)$ (với giả sử rằng $f'(x)$ luôn tồn tại). Ngược lại, khi biết tốc độ thay đổi $f'(x)$ của một đại lượng $f(x)$ thì có thể suy ra mô hình

hàm số biểu thị cho đường đi của đại lượng đó bằng cách lấy nguyên hàm của $f'(x)$. Nghĩa là $f(x)=\int f'(x)dx$

Kết hợp thêm các điều kiện ban đầu thích hợp để tìm ra $f(x)$ một cách chính xác.

2. Khi biết tốc độ thay đổi $f'(x)$ của một đại lượng $f(x)$. Sự chênh lệch giá trị của đại lượng $f(x)$ trong khoảng giá trị của biến x đi từ a đến b được xác định bởi công thức: $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$.

Đây là mấu chốt quan trọng để giải quyết các bài toán thực tiễn như khi biết tốc độ tăng trưởng của một đại lượng, ta có thể tìm một hàm số biểu thị số lượng của đại lượng đó qua từng thời kì. Trong thực tế, nhiều bài toán liên quan tới nội dung này có thể kể đến như: sự chuyển động của vật, sự gia tăng dân số, sự phát triển của vi khuẩn, các bài toán về sản xuất và kinh doanh...

DẠNG 1: BÀI TOÁN VỀ CHUYỂN ĐỘNG

- Giả sử vật M chuyển động trên quãng đường có độ dài là s trong khoảng thời gian t. Khi đó, vật M chuyển động với vận tốc trung bình là $v=\frac{s}{t}$
- Tuy nhiên, chúng ta gặp rất nhiều trường hợp vật chuyển động không đều, vận tốc thay đổi liên tục tùy theo vị trí và thời gian. Ví dụ xe chạy trên đường gặp nhiều chướng ngại vật thì giảm tốc, chạy trên đường thông thoáng thì tăng tốc. Vì vậy ta cần phương pháp tính đúng vận tốc của xe tại mỗi thời điểm.
- Giả sử *v(t)* là vận tốc của vật M tại thời điểm *t*, và *s(t)* là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian *t* tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa *s(t)* và *v(t)*

[redacted]

- Từ đây ta cũng có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $t\in[a;b]$ là:

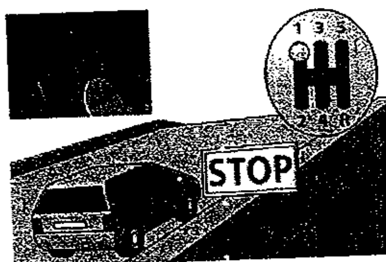
$$\int_a^b v(t)dt=s(b)-s(a)$$

- Nếu gọi *a(t)* là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa *v(t)* và *a(t)*
  - Đạo hàm của vận tốc chính là gia tốc $v'(t)=a(t)$
  - Nguyên hàm của gia tốc chính là vận tốc $v(t)=\int a(t)dt$

Bài toán 1: ***(Trích đề minh họa 2017).*** **Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì tài xế đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10(\text{m/s})$, trong đó *t* là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?**

A. 0,2m　　**B.** 2m.　　**C.** 10m.　　**D.** 20m.

■ Phân tích bài toán



- Ta có nguyên hàm của vận tốc $v(t) = -5t + 10$ chính là quãng đường $s(t)$ mà ô tô đi được sau thời gian t giây kể từ lúc tài xế đạp phanh.
- Vào thời điểm ô tô bắt đầu đạp phanh ứng với $t = 0$.
- Vào thời điểm ô tô dừng lại thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.
- Từ đây ta tính được quãng đường xe đi được từ lúc $t = 0$ đến $t = 2$ theo công thức $\int_0^2 v(t)dt$.

Hướng dẫn giải

[redacted]

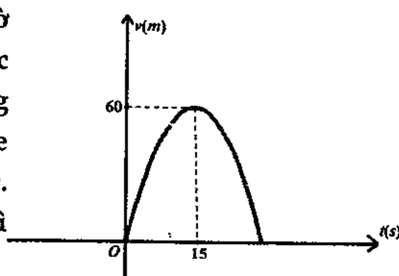
- Ta có mối liên hệ giữa 2 đại lượng biến thiên quãng đường đi được $S(t)$ và vận tốc $v(t)$ là: *Nguyên hàm của vận tốc $v(t)$ chính là quãng đường đi được $S(t)$*. Suy ra quãng đường đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại là tích phân của hàm $v(t)$ khi thời gian t từ 0s đến 2s.

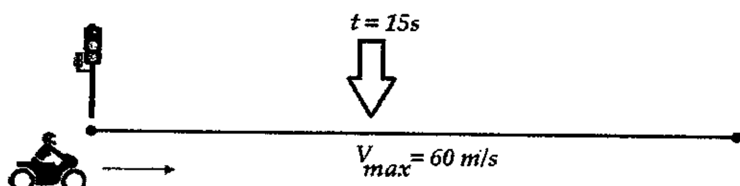
$$\int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (-5t + 10)dt = \left(-5\frac{t^2}{2} + 10t\right)\Bigg|_0^2 = 10m.$$

- Vậy chọn đáp án C.

> **■ Bình luận:** ***Qua bài toán này ta cần lưu ý:***
>
> *Một là, nguyên hàm của vận tốc là quãng đường đi được của vật chuyển động.*
>
> *Hai là, nếu biết s(t) là nguyên hàm của v(t) thì quãng đường của vật đi được trong khoảng thời gian $t \in [a;b]$ được tính theo công thức $\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a)$.*
>
> *Ba là, bài toán có thể giải theo phong cách Vật lí. Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển quãng đường là $S = v_o t + \frac{1}{2}at^2$ trong đó*
>
> $$\begin{cases} a = -5 \\ t = 2 \\ v_o = 10 \end{cases} \Rightarrow S = 10.2 + \frac{1}{2}(-5).2^2 = 10m$$

Bài toán 2: Một xe mô tô phân khối lớn sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong Parabol có hình bên. Biết rằng sau 15s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 60m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?





■ **Phân tích bài toán**

- Lúc ban đầu mô tô phóng nhanh với vận tốc thay đổi liên tục được biểu bằng đồ thị (P) như hình vẽ, và đề bài chưa cho biểu thức vận tốc $v(t)$, cho nên ta cần tìm biểu thức vận tốc chuyển động
- Vì đồ thị vận tốc có dạng là đường Parabol như hình vẽ nên biểu thức vận tốc sẽ có dạng $v(t)=at^2+bt+c$, đường cong Parabol có đỉnh $I(15;60)$, đồng thời đi qua gốc tọa độ O(0;0)
- Lúc bắt đầu tăng tốc xem như $t=0$, và theo đồ thị xe đạt vận tốc cao nhất vào thời điểm $t=15$.
- Nhắc lại rằng nguyên hàm của vận tốc $v(t)$ chính là quãng đường. Vậy quãng đường đi được của xe kể từ lúc tăng tốc ($t=0$ s) đến lúc đạt vận tốc cao nhất ($t=15$ s) tính theo công thức $\int_0^{15} v(t)dt$.

Hướng dẫn giải

- Hàm vận tốc $v(t)=at^2+bt+c$ có dạng là đường Parabol có đỉnh $I(15;60)$, đồng thời đi qua gốc tọa độ O(0; 0), suy ra

[redacted]

- Theo đồ thị thì xe bắt đầu tăng tốc lúc $t=0$ và đạt vận tốc cao nhất lúc $t=15$ s nên quãng đường đi được của xe từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất

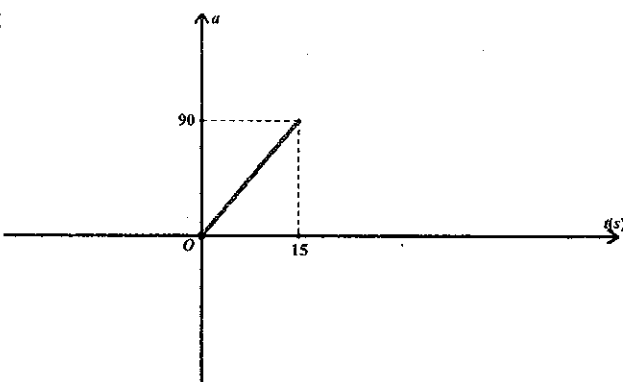
$$\int_0^{15} v(t)dt=\int_0^{15}\left(-\frac{4}{15}t^2+8t\right)dt=\left(-\frac{4}{45}t^3+4t^2\right)\Bigg|_0^{15}=600m.$$

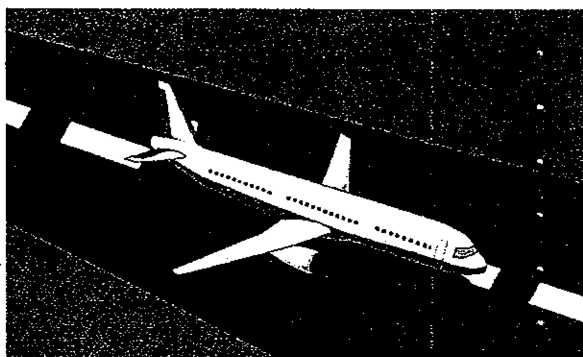
- Vậy từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được một quãng đường dài 600m.

■ **Bình luận:** ***Qua bài toán này ta cần lưu ý:***

Thông thường để tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$ *thì đề bài luôn cho sẵn biểu thức* $f(x)$. *Tuy nhiên, đối với ví dụ này, đề bài chỉ cho đồ thị của hàm* $f(x)$ *và học sinh phải thiết lập biểu thức* $f(x)$. *Đây là kĩ năng rất cần thiết vì trong quá trình học phổ thông, học sinh thường chỉ làm bài toán 1 chiều. Tức là, từ hàm số* $f(x)$ *vẽ thành đồ thị, rất ít khi (thậm chí là không có) học sinh gặp bài toán từ đồ thị suy ra biểu thức của hàm* $f(x)$.

Bài toán 3: Một máy bay đang chuyển động thẳng đều trên mặt đất với vận tốc $v = 3(\text{m/s})$ thì bắt đầu tăng tốc với độ biến thiên vận tốc là hàm số $a(t)$ có đồ thị hàm số là đường thẳng như hình bên. Sau 15s tăng tốc thì máy bay đạt đến vận tốc đủ lớn để phóng khỏi mặt đất. Hãy tính vận tốc khi máy bay bắt đầu rời khỏi mặt đất.





■ **Phân tích bài toán**

• Máy bay bắt đầu tăng tốc với độ biến thiên vận tốc là hàm số $a(t)$, và đề bài chưa cho công thức $a(t)$, nên bước đầu ta cần tìm công thức $a(t)$.

• Vì đồ thị hàm số $a(t)$ là đường thẳng nên có dạng $a(t) = mt + n$, đường thẳng này đi qua gốc tọa độ O(0; 0) và điểm A(16; 90) từ đó suy ra phương trình $a(t)$.

• Nhớ rằng: Nguyên hàm của gia tốc $a(t)$ chính là vận tốc $v(t)$ của vật chuyển động nên ta có $v(t) = \int a(t)dt$

• Chú ý điều kiện vận tốc của máy bay lúc bắt đầu tăng tốc là $v(0) = 3(\text{m/s})$, từ đây ta suy ra được hàm số $v(t)$.

- Để tính vận tốc của máy bay lúc rời khỏi mặt đất ta chỉ cần tính $v(15)$.

Hướng dẫn giải

- Đường thẳng $a(t) = mt + n$ đi qua gốc tọa độ O(0;0) và điểm A(16;90) nên suy ra

$$\begin{cases} m.0 + n = 0 \\ m.15 + n = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ m = 6 \end{cases} \Rightarrow a(t) = 6t.$$

- Ta hiểu rằng: *Nguyên hàm của gia tốc $a(t)$ chính là vận tốc của vật chuyển động.* Do đó ta có công thức vận tốc *v(t)* được tính theo công thức
$v(t) = \int a(t)dt = \int 6tdt = 3t^2 + C$
- Tại thời điểm bắt đầu tăng tốc thì xem như $t = 0$ và vận tốc lúc đó là $v = 3(\text{m/s})$.
Suy ra $v(0) = 3 \Leftrightarrow 3.0^2 + C = 3 \Leftrightarrow C = 3 \Rightarrow v(t) = 3t^2 + 3$.
- Vậy vận tốc máy bay đạt được khi bắt đầu phóng khỏi mặt đất là
$v(15) = 3.15^2 + 3 = 678$ (m/s).

■ **Bình luận:** ***Qua bài toán này ta cần lưu ý:***
Một là, cho đồ thị của một hàm số, từ đó suy ra phương trình của hàm số đó.
Hai là, nguyên hàm của gia tốc chính là vận tốc của vật chuyển động.

Bài toán 4: Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là 72 *m/s* bắt đầu từ độ cao 2*m*. Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian 5s kể từ lúc bắn.

■ **Phân tích bài toán**

- Để xác định được chiều cao của viên đạn tại thời điểm bất kì, ta cần tìm công thức quãng đường s(t) mà viên đạn đi được.
- Xem như tại thời điểm $t_0 = 0$ thì viên đạn được bắn lên. Theo giả thiết ta có $s(0) = 2$ và $v(0) = 72$.
- Ta biết rằng trong chuyển động ném đứng từ dưới lên thì gia tốc trọng trường có giá trị âm tại mọi thời điểm *t*, nghĩa là $a(t) = -9,8m/s^2$.
- Vận tốc *v(t)* là nguyên hàm của *a(t)* nên ta có $v(t) = \int -9,8dt$, kết hợp điều kiện vận tốc ban đầu là $v(0) = 72$ ta suy ra dạng của $v(t)$.
- Tiếp tục có *s(t)* là nguyên hàm của *v(t)*, kết hợp điều kiện vị trí ban đầu $s(0) = 2$ ta tìm được phương trình của *s(t)*. *Từ đây ta tính được s(5)*

Hướng dẫn giải

[redacted]

- Độ cao của viên đạn tại thời điểm *t* là
$s(t) = \int v(t)dt = \int (-9,8t + 72)dt = -4,9t^2 + 72t + C_2$
Vì $s(0) = 2$ nên $s(0) = -4,9.0^2 + 72.0 + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2 \Rightarrow s(t) = -4,9t^2 + 72t + 2$.

- Vậy sau khoảng thời gian 5s kể từ lúc bắn, viên đạn ở độ cao $s(5) = -4,9.5^2 + 72.5 + 2 = 239,5m$.

■ **Bình luận:** ***Qua bài toán này ta*** ta có bài toán tổng quát hơn cho chuyển động ném đứng từ dưới lên của vật. Giả sử vật A được ném thẳng đứng lên với vận tốc ban đầu v_0 ở vị trí độ cao s_0 so với mặt đất. Ta sẽ thiết lập các hàm vận tốc và hàm độ cao của vật A như sau:

- Xem như tại thời điểm $t_0 = 0$ thì vật được ném hướng lên. Theo giả thiết ta có $s(0) = s_0$ và $s'(0) = v_0$.
- Ta biết rằng trong chuyển động ném đứng từ dưới lên thì gia tốc trọng trường có giá trị âm tại mọi thời điểm *t*, nghĩa là $s''(t) = -9,8m/s^2$.
- Ta có vận tốc của viên đạn tại thời điểm *t* là

  $s'(t) = \int -9,8dt = -9,8t + C_1$

  Do $s'(0) = v_0$ nên $s'(0) = -9,8.0 + C_1 = v_0 \Leftrightarrow C_1 = v_0 \Rightarrow s'(t) = -9,8t + v_0$.
- Độ cao của viên đạn tại thời điểm *t* là

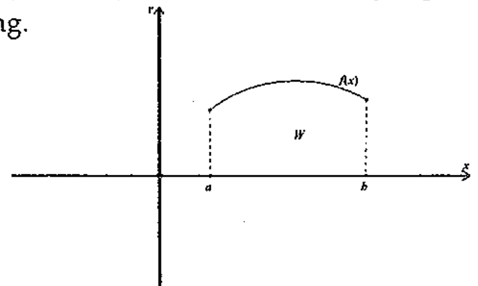
  $s(t) = \int s'(t)dt = \int(-9,8t + v_0)dt = -4,9t^2 + v_0t + C_2$

  Vì $s(0) = s_0$ nên $s(0) = -4,9.0^2 + 72.0 + C_2 = s_0 \Leftrightarrow C_2 = s_0 \Rightarrow s(t) = -4,9t^2 + v_0t + s_0$.
- Vậy ta có hàm vận tốc $s'(t) = -9,8t + v_0$ và hàm độ cao $s(t) = -4,9t^2 + v_0t + s_0$.

DẠNG 2: BÀI TOÁN VỀ CÔNG CỦA LỰC TÁC DỤNG VÀO VẬT

- Nếu một lực không đổi *F* tác dụng lên vật M dọc theo một khoảng cách (độ dời) *d* thì công W sinh ra trong quá trình dịch chuyển bằng tích của lực *F* và độ dài khoảng cách *d* mà nó đã tác dụng, ta có công thức $W = F.d$ trong đó, lực *F* được hiểu là tác dụng dọc theo hướng (phương) chuyển động.

- Định nghĩa trên luôn đúng khi lực *F* không đổi. Tuy nhiên, nhiều trường hợp lực *F* biến thiên trong suốt quá trình thực hiện công. Trong các tình huống như vậy, người ta thường chia quá trình này thành nhiều phần nhỏ và tính công toàn phần nhờ lấy tổng các công tương ứng với các phần được chia (được tính nhờ phép tính tích phân).



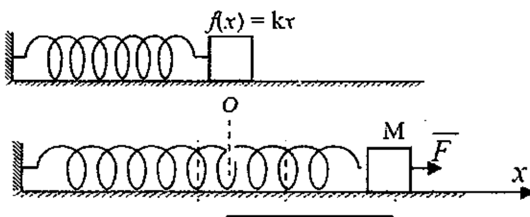
- Giả sử *f(x)* là lực tác dụng lên vật tại vị trí *x*, đường đi của lực tác dụng(quỹ đạo của vật được tác dụng lực) tương ứng với trục tọa độ *Ox*. Khi đó, công toàn phần sinh ra trong cả quá trình chuyển động của vật từ vị trí $x = a$ đến vị trí $x = b$ là:

$$W = \int_a^b f(x)dx$$

Bài toán 1: Một lực 40N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên từ 10cm đến 15cm. Hãy tính công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ 15cm đến 18cm.

■ **Phân tích bài toán**

- Khi một lò xo bị biến dạng (bị nén hoặc kéo giãn) thì lò xo sẽ sinh ra một lực gọi là lực đàn hồi, lực đàn hồi này chống lại sự biến dạng, giúp lò xo trở về lại hình dạng tự nhiên ban đầu.

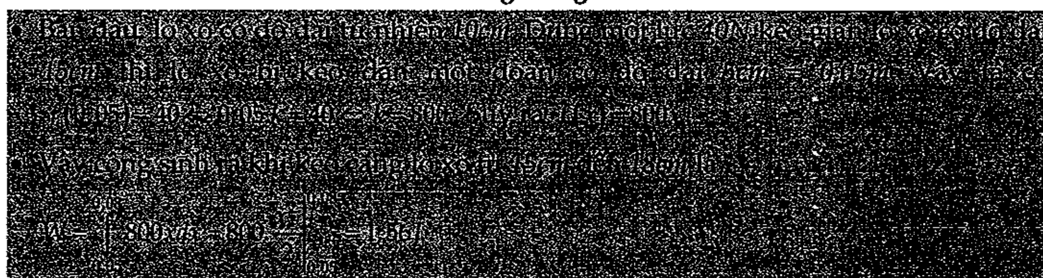


- Theo định luật Hooke: "Khi một lò xo bị biến dạng (nén hoặc giãn) với một độ dài x ($x > 0$) so với độ dài tự nhiên của lò xo thì lò xo sinh ra một lực đàn hồi có độ lớn bằng $f(x) = kx$, trong đó k là hệ số đàn hồi (hoặc độ cứng) của lò xo.

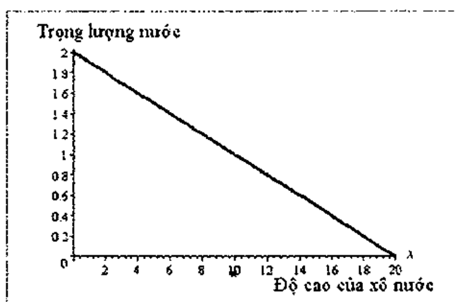
- Dùng giả thiết để suy ra hàm số $f(x) = kx$. Khi đó, công sinh ra khi kéo căng lò xo từ 15cm đến 18cm được tính theo công thức

$$W = \int_{0,05}^{0,08} f(x)dx$$

Hướng dẫn giải


[redacted]

Bài toán 2: Người thợ hồ nâng một xô nước bị rỉ lên cao 20m với tốc độ cố định. Cho trọng lượng của xô là 3N, trọng lượng ban đầu của nước là 2N. Biết rằng xô nước bị rỉ nên lượng nước trong xô sẽ chảy ra với tốc độ không đổi trong thời gian nâng xô nước lên. Người ta ước tính rằng lượng nước trong xô sẽ thay đổi theo đồ thị là hình bên. Hỏi người thợ hồ đã dùng một công là bao nhiêu để nâng xô nước lên cao 20m, với giả sử rằng bỏ qua trọng lượng sợi dây?



■ **Phân tích bài toán**

- Trong suốt thời gian đưa xô nước lên độ cao 20m thì trọng lượng của xô không đổi, nhưng nước bị chảy ra liên tục nên trọng lượng nước thay đổi. Vì vậy để tính được công đưa xô nước lên cao thì ta tách làm 2 loại công: Một là công đưa xô lên, hai là công đưa nước lên.

- Vì trọng lượng xô không đổi trong suốt thời gian đưa lên cao nên công cũng không đổi và tính bằng công thức $W_{xô} = P_{xô}.h = 3.20 = 60(Nm)$.
- Vì lượng nước giảm liên tục nên trọng lượng của nước là một hàm số $f(x)$ giảm liên tục phụ thuộc vào quãng đường x mà xô đi được.
- Theo giả thiết đồ thị biểu diễn trọng lượng xô nước là đường thẳng có dạng $f(x) = ax + b$, dựa vào đồ thị ta tìm được phương trình $f(x) = ax + b$.
- Khi đó, công để đưa lượng nước lên cao 20m tính theo công thức

$$\int_0^{20} f(x)dx.$$

- Vậy công cần thực hiện để đưa cả xô và nước lên cao 20m là

$$60 + \int_0^{20} f(x)dx.$$

Hướng dẫn giải

[redacted]

- Đồ thị hàm số $f(x) = ax + b$ đi qua 2 điểm A(0;2) và B(20;0) nên

$$\begin{cases} a.0 + b = 2 \\ a.20 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -\dfrac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{10}x + 2.$$

- Công sinh ra khi đưa nước từ mặt đất lên cao 20 là:

$$\int_0^{20} f(x)dx = \int_0^{20}\left(-\frac{1}{10}x + 2\right)dx = \left.\left(-\frac{1}{20}x^2 + 2x\right)\right|_0^{20} = 20(Nm).$$

- Vậy công toàn bộ để đưa cả xô và nước lên cao 20m là $60 + 20 = 80(Nm)$.

DẠNG 3: BÀI TOÁN VỀ TĂNG TRƯỞNG, PHÁT TRIỂN

- Cho hàm số $f(x)$ biểu diễn cho sự tăng (hay giảm) số lượng của một đối tượng nào đó (số người, vi khuẩn, vi trùng, lượng nước chảy,...).
- Giá trị $f(x)$ là số lượng của đối tượng đó tại thời điểm x.
- Đạo hàm $f'(x)$ chính là tốc độ tăng (hay giảm) của đối tượng đó tại thời điểm x.
- Số lượng tăng thêm (hoặc giảm đi) của đối tượng trong khoảng $x \in [a;b]$ là:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Bài toán 1: Một nghiên cứu chỉ ra rằng sau x tháng kể từ bây giờ, dân số của thành phố A sẽ tăng với tốc độ $v(x)=10+2\sqrt{2x+1}$ (người/tháng). Dân số của thành phố sẽ tăng thêm bao nhiêu trong 4 tháng tới.

■ **Phân tích bài toán**

- Giả thiết cho $v(x)=10+2\sqrt{2x+1}$ hàm biểu thị cho tốc độ tăng dân số trong tháng thứ x. Vậy nguyên hàm của $v(x)$ chính là hàm số $f(x)$ biểu thị cho dân số của thành phố sau x tháng kể từ bây giờ.
- Đề bài yêu cầu tính số dân tăng thêm của thành phố trong vòng 4 tháng tới. Theo lý thuyết đã nêu thì số dân tăng thêm đó được tính theo công thức.
- $\int_0^4 v(t)dt = f(4)-f(0)$
- Chú ý rằng ta có thể tính bằng 2 cách. Cách 1 là tìm nguyên hàm $f(x)$, sau đó tính hiệu số $f(4)-f(0)$. Cách 2 là tính trực tiếp tích phân $\int_0^4 v(t)dt$.

Hướng dẫn giải

- Gọi $f(x)$ là dân số của thành phố sau x tháng kể từ bây giờ.
- Tốc độ thay đổi của dân số là $v(x)=10+2\sqrt{2x+1}$.
- Suy ra $f(x)=\int\left(10+2\sqrt{2x+1}\right)dx=10x+2\int\sqrt{2x+1}dx$.
- Mà $\int\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int(2x+1)^{\frac{1}{2}}d(2x+1)=\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C$.
- Do đó $f(x)=10x+\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C$.
- Số dân trong 4 tháng tới là:

$$f(4)-f(0)=10.4+\frac{2}{3}(2.4+1)^{\frac{3}{2}}+C-\left(0+\frac{2}{3}+C\right)\approx 57 \text{ người}$$

■ **Bình luận:** ***Qua bài toán này ta cần lưu ý:***

Một là, nếu gọi f(x) là số dân thay đổi theo thời gian x thì đạo hàm f'(x) chính là tốc độ thay đổi (tăng hoặc giảm) của số dân.

Hai là, nguyên hàm của hàm tốc độ tăng giảm f'(x) chính là hàm f(x) biểu thị cho dân số.

Ba là, bài toán có thể giải theo cách thứ 2. Vì $v(x)$ là tốc độ tăng dân số từ bây giờ (x = 0) đến tháng thứ 4 (t = 4) nên số dân tăng thêm (hoặc giảm đi) trong thời gian đó là

$$\int_0^4 v(x)dx=\int_0^4\left(10+2\sqrt{2x+1}\right)dx=\left.\left(10x+\frac{4}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\right|_0^4\approx 57 \text{ người.}$$

$$\int_a^b f'(t)dt=f(b)-f(a)$$

Bài toán 2: Tốc độ thay đổi của số lượng người V (tính bằng ngàn người) tham gia công tác tình nguyện ở nước Mỹ từ năm 2000 đến năm 2006 có thể được mô hình bởi hàm số $V(t)=119,85t^2-30e^t+37,26e^{-t}$ với t là năm (t = 0 ứng với năm 2000)

Hỏi số lượng người tham gia tình nguyện trong giai đoạn trên tăng lên hay giảm đi với số lượng bao nhiêu. (Nguồn: Cục thống kê lao động nước Mỹ).

■ Phân tích bài toán

- Hàm số $V(t)=119,85t^2-30e^t+37,26e^{-t}$ biểu thị cho tốc độ thay đổi số lượng người tham gia công tác tại năm thứ *t* (tính từ năm 2000 đến năm 2006).
- Suy ra nguyên hàm $S(t)$ của $V(t)$ chính là số lượng người tham gia công tác tại năm thứ *t*.
- Đề bài yêu cầu tính số lượng người thay đổi (tăng lên hay giảm đi) trong khoảng từ năm 2000 đến năm 2006. Số lượng này chính được tính bằng công thức

$$\int_0^6 V(t)dt=S(6)-S(0)$$

- trong đó $t=0$ ứng với năm 2000, $t=6$ ứng với năm 2006.

Hướng dẫn giải

- Sự chênh lệch của số người tham gia tình nguyện trong giai đoạn từ năm 2000 đến năm 2006 là:

$$\int_0^6 V(t)dt=\int_0^6\left(119,85t^2-30e^t+37,261e^{-t}\right)dt$$

$$=\left(\frac{119,85}{3}t^3-30e^t-37,261e^{-t}\right)\Big|_0^6=-3473,756166-(-67,261)\approx-3406$$

- Vậy trong khoảng thời gian từ năm 2000 đến năm 2006, số lượng người tham gia công tác tình nguyện đã giảm đi khoảng 3406 người.

Bài toán 3: Tốc độ tăng các cặp đôi kết hôn (đơn vị tính: triệu người) của nước Mỹ từ năm 1970 đến năm 2005 có thể được mô hình bởi hàm số $f(t)=1,218t^2-44,72t+709,1$ với t là năm ($t=0$ ứng với năm 1970). Số lượng cặp đôi kết hôn vào năm 2005 là 59513 ngàn người.

a. Tìm một mô hình biểu thị cho số lượng các cặp đôi kết hôn của nước Mỹ.

b. Sử dụng mô hình đó để dự đoán số lượng các cặp đôi kết hôn của nước Mỹ vào năm 2012. Kết quả của bạn liệu có hợp lí? Giải thích vì sao?

■ Phân tích bài toán

- Ở đây ta hiểu rằng năm 1970 ứng với $t=0$ và năm 2005 ứng với $t=35$.
- Hàm số $f(t)=1,218t^2-44,72t+709,1$ biểu thị cho tốc độ tăng các cặp đôi kết hôn vào năm thứ *t*. Suy ra nguyên hàm của $f(t)$ là hàm số $F(t)$ biểu thị cho số lượng cặp đôi kết hôn vào năm thứ *t*.
- Dựa vào điều này ta tìm ra mô hình $F(t)$ với điều kiện $F(35)=59513$.

- Từ mô hình $F(t)$ ta có thể tính được số lượng cặp đôi kết hôn vào năm bất kì trong khoảng từ năm 1970 đến 2005.

Hướng dẫn giải


[redacted]

- Số lượng các cặp đôi kết hôn vào năm 2005 là 59.513 triệu người nên ta có $F(35) = 59513 \Leftrightarrow 0,406.35^3 - 22,36.35^2 + 709,1.35 + C = 59513 \Leftrightarrow C = 44678,25$
- Vậy một mô hình cần tìm là $F(t) = 0,406t^3 - 22,36t^2 + 709,1t + 44678,25$

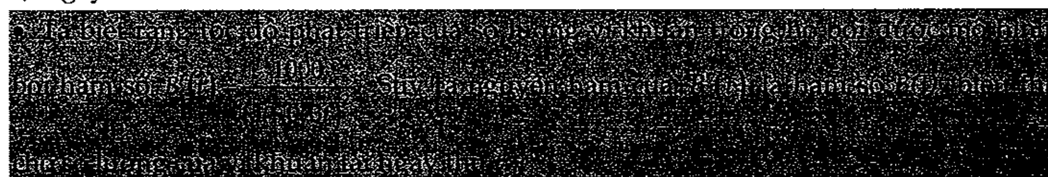
b. Số lượng các cặp đôi kết hôn vào năm 2012 là $F(42) = 65097,138$ triệu người

Theo báo cáo của Cục điều tra dân số nước Mỹ thì vào năm 2012 tổng số các cặp đôi kết hôn của nước Mỹ khoảng 61,047 triệu người. So với kết quả lý thuyết thì sự chênh lệch là tạm chấp nhận được.

Bài toán 4: Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t) = \dfrac{1000}{(1+0,3t)^2}$, $t \geq 0$, trong đó *B(t)* là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ *t*. Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lí và thay nước mới cho hồ bơi.

■ **Phân tích bài toán**

- Để biết được sau bao nhiêu ngày phải thay nước mới cho hồ bơi thì ta cần xác định sau bao nghiêu ngày thì số lượng vi khuẩn phát triển đến 3000 con trên mỗi ml nước. Như vậy ta phải xác định hàm số *B(t)* biểu thị cho số lượng phát triển của vi khuẩn tại ngày thứ *t*.


[redacted]

- Khi đó, kết hợp với điều kiện số lượng vi khuẩn lúc đầu *B(0) = 500* con, ta tìm được một mô hình *B(t)* biểu thị cho số lượng vi khuẩn tại ngày thứ *t*.
- Từ đây ta có thể tính số lượng vi khuẩn tại thời điểm tùy ý và xác định được người bơi có an toàn hay không? Có nên thay nước cho hồ bơi hay không?

Hướng dẫn giải

- Số lượng của vi khuẩn tại ngày thứ *t* được mô hình bởi hàm số *B(t)* là nguyên hàm của *B'(t)*.

$$B(t)=\int \frac{1000}{(1+0,3t)^2}dt=1000\int (1+0,3t)^{-2}dt=-\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}+C.$$

- Số lượng vi khuẩn lúc ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước nên

  $B(0)=500 \Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1+0,3.0)}+C=500 \Leftrightarrow C=\frac{11500}{3}$

- Suy ra hàm số biểu thị cho số lượng vi khuẩn tại ngày thứ *t* là

  $B(t)=-\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}+\frac{11500}{3}.$

- Số lượng vi khuẩn dưới 3.000 con trên mỗi ml nước thì người bơi vẫn an toàn; và người bơi không an toàn khi

  $B(t)\ge 3000 \Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}+\frac{11500}{3}\ge 3000$

  $\Leftrightarrow -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}\ge -\frac{2500}{3} \Leftrightarrow 1+0,3t\ge 4 \Leftrightarrow t\ge 10.$

- Vậy vào ngày thứ 10 thì số lượng vi khuẩn sẽ là 3.000 con và hồ bơi không còn an toàn, cần phải thay nước mới.

Bài toán 5: Một hồ nước bị ô nhiễm được xử lý bằng một chất diệt khuẩn. Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn sống sót được mô hình bởi $B'(t)=\frac{3000}{(1+0,2t)^2}$, $t\ge 0$ **với *B(t)* là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước là *t* là số ngày tính từ khi hồ nước được xử lý. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu là 10.000 con/ml nước. Sử dụng mô hình này xác định số lượng vi khuẩn sau 5 ngày. Liệu số lượng vi khuẩn có thể vượt 2.000 con/ml nước.**

■ **Phân tích bài toán**

- Theo giả thiết, tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn sống sót được mô hình bởi công thức $B'(t)=-\frac{3000}{(1+0,2t)}$, $t\ge 0$ với *t* là số ngày tính từ khi hồ bơi được xử lí. Suy ra nguyên hàm của $B'(t)$ là hàm số $B(t)$ biểu thị cho số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ *t* (kể từ lúc hồ nước được xử lí).

- Kết hợp với điều kiện số lượng vi khuẩn ban đầu là *B(0) = 10.000* con/ml nước, ta tìm được mô hình $B(t)$. Từ đây ta tính được $B(5)$ là số lượng vi khuẩn sống sót sau 5 ngày kể từ khi hồ nước được xử lí.

Hướng dẫn giải

- Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn sống sót được mô hình bởi công thức đạo hàm $B'(t)=-\frac{3000}{(1+0,2t)^2}$, $t\ge 0$.

- Nguyên hàm của $B'(t)$ là hàm $B(t)$ biểu thị số lượng vi khuẩn sống sót trong ngày thứ *t*.

Ta có $B(t)=\int\frac{-3000}{(1+0,2t)^2}dt=-3000\int(1+0,2t)^{-2}dt=1.5000(1+0,2t)^{-1}+C=\frac{1.5000}{1+0,2t}+C$

[redacted]

- Số vi khuẩn sau 5 ngày sẽ là $B(5)=2.500con/1ml$.
- Như vậy số lượng vi khuẩn đã vượt qua 2.000 con/ml nước.

Bài toán 6: Người ta thay nước mới cho 1 bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là $h_1=280cm$. Giả sử *h(t)* là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm *t* giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ *t* là $h'(t)=\frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì nước bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi?

■ **Phân tích bài toán**

- Tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ *t* là $h'(t)=\frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}$. Suy ra nguyên hàm của *h'(t)* chính là chiều cao của mực nước đã bơm được tại thời điểm *t*. Ta sẽ tính công thức nguyên hàm *h(t)*.
- Kết hợp với điều kiện lúc ban đầu hồ không chứa nước, tức là độ cao của mực nước trong hồ tại thời điểm *t = 0* là *h(0) = 0*. Ta suy ra mô hình hàm số *h(t)* biểu thị cho chiều cao của mực nước bơm được tại thời điểm *t*.
- Từ đây ta có thể xác định được thời gian để bơm được lượng nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi.

Hướng dẫn giải

Ta biết rằng chiều cao *h*(*t*) của mực nước bơm được chính là nguyên hàm của tốc độ tăng *h'(t)* của chiều cao mực nước.

[redacted]

Suy ra mực nước bơm được tại thời điểm *t* giây là

$$h(t)=\frac{3}{2.000}(t+3)^{\frac{4}{3}}-\frac{3^{\frac{7}{3}}}{2.000}.$$

Theo giả thiết lượng nước bơm được bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi nên ta có

[illegible]

Vậy sau khoảng thời gian 2 giờ 34 giây thì bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi.

Bài toán 7: Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện Hố Hô đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm *t* giây là $v(t) = 10t + 500\left(m^3/s\right)$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ chứa nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

■ **Phân tích bài toán**

- Trong 40 phút, nhà máy thủy điện xả lũ với tốc độ $v(t) = 10t + 500\left(m^3/s\right)$. Nguyên hàm của $v'(t)$ chính là hàm số $f(t)$ biểu thị cho lượng nước đã xả tại thời điểm t.
- Lượng nước xả được trong thời gian 40 phút (ứng với 2.400 giây) bằng tích phân

$$\int_0^{2400} v'(t)dt$$

- Như vậy, bằng phép tính này ta đã xác định được lượng nước đã thoát ra.

Hướng dẫn giải

Lượng nước lũ đã xả trong khoảng thời gian 40 phút (2400 giây) sẽ bằng:

$$\int_0^{2400} v'(t)dt = \int_0^{2400}(10t+500)dt = \left(5t^2+500t\right)\Big|_0^{2400} = 3.10^7\left(m^3\right)$$

Vậy trong khoảng thời gian 40 phút, nhà máy đã xả một lượng nước là 30 triệu khối, tức là hồ chứa nước đã thoát đi 30 triệu khối nước.

Bài toán 8: Trọng lượng của một bào thai người nặng khoảng 0,04 ounce (1ounce = 28,3495 gram) sau 8 tuần tuổi. Trong suốt 35 tuần tiếp theo, trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc độ: $B'(t) = \frac{2436e^{-0,193t}}{\left(1+784e^{-0,193t}\right)^2}, 8 \le t \le 43$ với

***B(t)* là cân nặng tính bằng ounce và *t* là thời gian tính bằng tuần. Hãy tính trọng lượng của bào thai sau 25 tuần tuổi.**

■ **Phân tích bài toán**

- Tốc độ tăng của trọng lượng bào thai được mô hình bởi hàm số $B'(t) = \frac{2436e^{-0,193t}}{\left(1+784e^{-0,193t}\right)^2}, 8 \le t \le 43$. Nguyên hàm của $B'(t)$ chính là hàm số $B(t)$ biểu thị cho cân nặng của bào thai tại thời điểm t (tính bằng tuần).
- Kết hợp với điều kiện trọng lượng ban đầu của bào thai $B(8) = 0,04$, ta sẽ tìm ra hàm số *B(t)*. Từ đây ta có thể dự đoán được trọng lượng của bào thai trong thời gian sắp tới.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết thì trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc độ là hàm số $B'(t)=\dfrac{2436e^{-0,193t}}{\left(1+784e^{-0,193t}\right)^2}, 8\le t\le 43$ nên *B(t)* chính là nguyên hàm của *B'(t)*.



Sau 8 tuần tuổi thì bào thai cân nặng khoảng 0,04 ounce nên

$$B(8)=0,04\Rightarrow \frac{16,1}{1+784e^{-0,193.8}}+C=0,04\Rightarrow C=-0,0556$$

Do đó ta có hàm số cân nặng của bào thai là

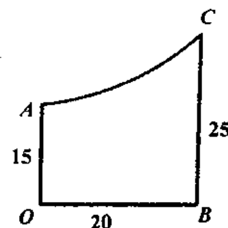
$$B(t)\approx\frac{16,1}{1+784e^{-0,193t}}-0,0556,\ 8\le t\le 43.$$

Cân nặng của bào thai sau 25 tuần tuổi là:

$$B(25)\approx\frac{16,1}{1+784e^{-0,193.25}}-0,0556=2,152ounce.$$

DẠNG 4: BÀI TOÁN VỀ TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

Bài toán 1: Một mảnh vườn hình thang cong OACB vuông tại O và B, có dạng như hình vẽ, trong đó độ dài các cạnh OA = 15m, OB = 20m, BC = 25m, và đường cong AC được mô tả bởi một hàm số mũ có dạng $f(x)=N.e^{mx}$ trong đó N và m là các hằng số. Hỏi mảnh vườn này có diện tích bao nhiêu?

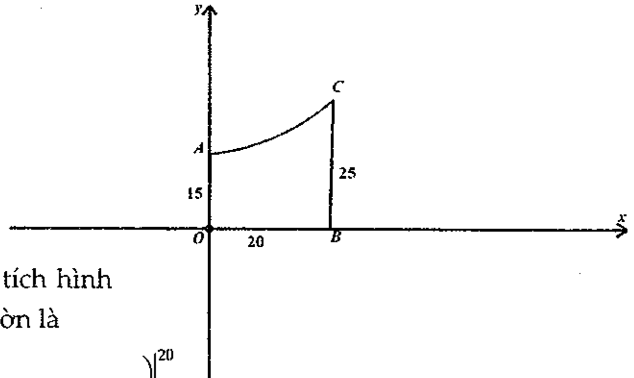


■ **Phân tích bài toán**

- Điều đầu tiên dễ nhận thấy là chúng ta không thể dùng công thức diện tích hình thang thông thường để tính diện tích cho hình thang cong OACB. Để tính được diện tích này ta cần dùng ý nghĩa hình học của tích phân.
- Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, khi đó hình thang cong OACB được đơn giản hóa trong mặt phẳng tọa độ Oxy.
- Bước tiếp theo ta cần tìm hàm số mũ $f(x)=N.e^{mx}$ biểu thị cho đường cong AC, để ý rằng đường cong AC đi qua điểm A(0; 15) và C(20; 25).
- Diện tích của hình thang cong được tính theo công thức $S=\int_0^{20} f(x)dx$

Hướng dẫn giải

- Không mất tính tổng quát, chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ sao cho các đoạn OA, OB lần lượt nằm trên các trục Oy, Ox.
- Để tính được diện tích mảnh vườn, ta cần tìm hàm số $f(x) = N.e^{mx}$.
- Theo hình vẽ ta có



$$\begin{cases} f(0) = 15 \\ f(20) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N = 15 \\ 15.e^{20m} = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N = 15 \\ m = \frac{1}{20}ln\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow f(x) = 15.e^{\frac{x}{20}ln\frac{5}{3}}$$

- Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có diện tích mảnh vườn là

$$S = \int_0^{20} f(x)dx = \int_0^{20}\left(15.e^{\frac{x}{20}ln\frac{5}{3}}\right)dx = \left.\left(\frac{20}{ln\frac{5}{3}}.15.e^{\frac{x}{20}ln\frac{5}{3}}\right)\right|_0^{20} \approx 391,52m^2.$$

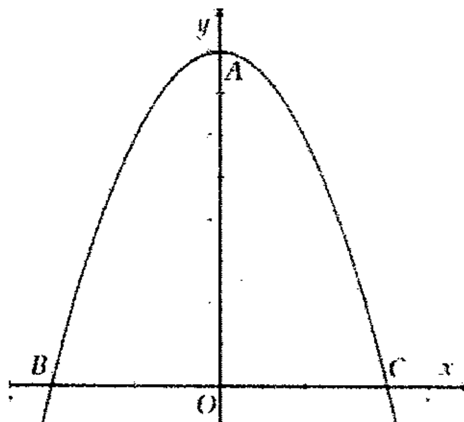
■ **Bình luận:** ***Qua bài toán này ta cần lưu ý:***

Một là, để tính diện tích của các hình phẳng phức tạp (không phải là tam giác, tứ giác, hình tròn,...) ta cần dùng đến tích phân để tính diện tích.

Hai là, đối với mỗi hình phẳng ta cần chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho hình phẳng đó được đơn giản hóa mà không mất tính tổng quát, kết quả diện tích không sai lệch.

Bài toán 2: Vòm cửa lớn của trường Đại Học Sư Phạm Tp.Hồ Chí Minh có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao 8 m và rộng 8 m.

Hướng dẫn giải



■ **Phân tích bài toán**

- Hình phẳng cần tính diện tích được giới hạn bởi 1 đường thẳng BC và 1 đường cong Parabol, cho nên ta không thể dùng các công thức tính diện tích của những hình

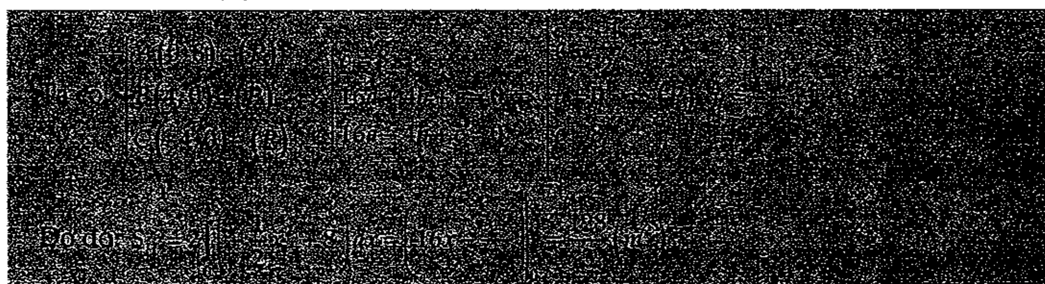
đơn giản quen thuộc như: hình chữ nhật, hình tròn, tam giác,... Ta cần dùng tích phân để tính diện tích hình phẳng này.

- Như vậy, việc đầu tiên ta cần đưa đường cong Parabol của cánh cửa vào hệ trục Oxy và mô hình nó thành hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$.
- Dựa vào độ cao 8m và chiều rộng 8m của cánh cửa ta dễ dàng xác định các hệ số *a, b, c* trong biểu thức hàm số.
- Ứng dụng ý nghĩa hình học của tích phân ta có công thức tính diện tích của cánh cửa là $S = \int_{-4}^{4}\left(ax^2 + bx + c\right)$
- Lưu ý rằng cánh cửa rộng 8m và ta cho đường cong Parabol đối xứng qua trục tung Oy nên dễ suy ra các cận $x = -4$ và $x = 4$.

Hướng dẫn giải

Không mất tổng quát, ta xét dạng hình parabol vòm cửa lớn như hình vẽ sau

Đồng thời xét $(P): y = ax^2 + bx + c$.



Bài toán 3: Trong nghiên cứu khoa học, người ta sử dụng thể tích của một quả trứng để xác định kích thước của nó là một cách dự báo khá tốt về các thành phần cấu tạo của trứng và đặc điểm của con non sau khi nở ra. Một quả trứng ngỗng được mô hình bởi quay đồ thị hàm số $y = \frac{1}{30}\sqrt{7569 - 400x^2}$, $-4,35 \le x \le 4,35$ quanh trục Ox. Sử dụng mô hình này để tính thể tích quả trứng (*x, y* được đo theo đơn vị cm)

■ **Phân tích bài toán**

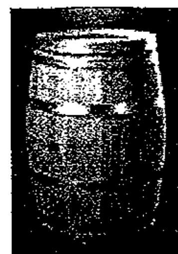
- Quả trứng ngỗng trong đề bài được mô hình bởi quay đồ thị hàm số $y = \frac{1}{30}\sqrt{7569 - 400x^2}$, $-4,35 \le x \le 4,35$ quanh trục Ox.
- Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm $y = \frac{1}{30}\sqrt{7569 - 400x^2}$, $-4,35 \le x \le 4,35$ và trục Ox.
- Thể tích của quả trứng bằng thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng quay quanh trục Ox.
- $V = \pi \int_{-4,35}^{4,35} y^2 dx$

Hướng dẫn giải

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: đồ thị hàm số $y = \frac{1}{30}\sqrt{7569 - 400x^2}, -4,35 \le x \le 4,35$ và trục Ox.
- Thể tích của quả trứng bằng thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng (H) xoay quanh trục Ox:

$$V = \pi \int_{-4,35}^{4,35} \left(\frac{1}{30}\sqrt{7569 - 400x^2} \right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{900} \int_{-4,35}^{4,35} \left(7569 - 400x^2\right) dx = \frac{\pi}{900}\left(7569x - 400\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-4,35}^{4,35} \approx 153cm^3$$



Bài toán 4: Một thùng rượu có bán kính ở trên là 30 cm và ở giữa là 40 cm. Chiều cao thùng rượu là 1m. Hỏi thùng rượu đó chứa được tối đa bao nhiêu lít rượu (kết quả lấy 2 chữ số thập phân)? Cho rằng cạnh bên hông của thùng rượu là hình parabol.

A. 321,05 lít. **B. 540 lít.** **C. 201,32 lít.** **D. 425,16 lít.**

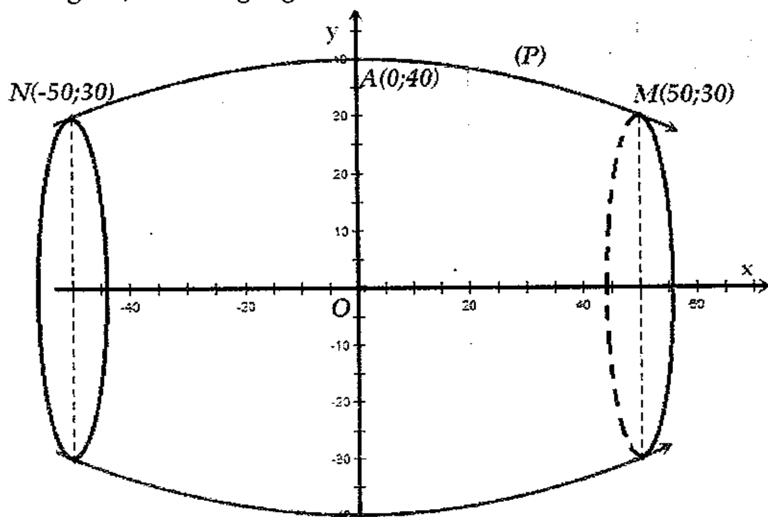
■ Phân tích bài toán

- Thùng rượu có dạng là một khối tròn xoay có đường sinh là một đường cong có dạng Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c\left(a \ne 0\right)$. Vì vậy để tính thể tích thùng rượu ta cần áp dụng tích phân để tính thể tích khối tròn xoay. Chú ý rằng khi mô hình đường cong Parabol ta để chiều cao của thùng rượu trải theo chiều của trục hoành.

- Bước đầu ta cần xây dựng hàm số $(P): y = ax^2 + bx + c\,(a \ne 0)$ với điều kiện đi qua các đỉnh N(-50;30), A(0;40), M(50;30) như hình vẽ.
- Dựa vào chiều cao 1m của thùng rượu ta tìm được các cận của tích phân. Khi đó lập được công thức tính được thể tích thùng rượu.

Hướng dẫn giải

- Ta sẽ để thùng rượu nằm ngang để thuận lợi cho việc tính toán.

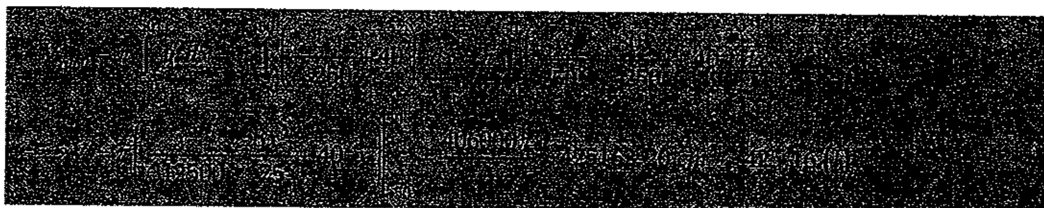


- Ta cần tìm phương trình parabola $(P): y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ đi qua đỉnh M, N, A

$$\begin{cases} M(50;30) \in (P) \\ A(0;40) \in (P) \\ N(-50;30) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50^2 a + 50b + c = 30 \\ c = 40 \\ 50^2 a - 50b + c = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{250} \\ b = 0 \\ c = 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P): y = -\frac{x^2}{250} + 40 .$$

- Tới đây ta áp dụng công thức tính thể tích V khi quay hình phẳng giới hạn bởi (parabol), $x = 50, x = -50, y = 0$ xung quanh trục hoành Ox :


[redacted]

- Vậy thùng rượu chứa được tối đa 425,16 lít.

DẠNG 4: BÀI TOÁN VỀ KINH TẾ

Bài toán 1: Sau *t* giờ làm việc một người công nhân có thể sản xuất với tốc độ là $q(t) = 100 + e^{-0,5t}$ đơn vị sản phẩm trong 1 giờ. Giả sử người đó bắt đầu làm việc từ lúc 8 giờ sáng. Hỏi người đó sẽ sản xuất được bao nhiêu đơn vị sản phẩm giữa 9 giờ sáng và 11 giờ trưa?

■ **Phân tích bài toán**

- Đề bài cho hàm $q(t) = 100 + e^{-0,5t}$ mô tả tốc độ sản xuất sản phẩm của một người công nhân. Suy ra nguyên hàm của $q(t)$ là hàm số $S(t)$ mô tả số lượng sản phẩm làm ra của người công nhân đó trong t giờ.
- Lúc 8 giờ người công nhân đó bắt đầu làm việc (ta xem như $t = 0$). Như vậy thời gian từ 9 giờ sáng đến 11 giờ ứng với t từ 1 đến 4.
- Số đơn vị sản phẩm người công nhân đó làm được từ 9 giờ đến 11 giờ là:

$$\int_1^4 q(t)dt$$

Hướng dẫn giải

[redacted]

- Số đơn vị sản phẩm người đó sản xuất được từ 9 giờ sáng $(t = 1)$ đến 11 giờ trưa $(t = 4)$ là $\int_1^4 q(t)dt = \int_1^4 (100 + e^{-0,5t})dt = (100t - 2e^{-0,5t})\Big|_1^4 = 200,76$ đơn vị sản phẩm.

Bài toán 2: Qua điều tra các nhà phân tích kinh tế đã nhận định rằng tốc độ tăng trưởng kinh tế (GDP) của một quốc gia sau t năm tính từ đầu năm 2004 là $30+\frac{1}{2}\sqrt{5+t}$ tỷ USD/năm. Biết rằng GDP của quốc gia đó vào đầu năm 2004 là 100 tỷ USD. Hãy dự đoán GDP của quốc gia đó vào đầu năm 2015.

■ **Phân tích bài toán**

- Tốc độ tăng trưởng kinh tế (GDP) của quốc gia đó sau t năm tính từ năm 2004 được mô tả bởi hàm số $q(t)=30+\frac{1}{2}\sqrt{5+t}$. Suy ra nguyên hàm của $q(t)$ là hàm số $S(t)$ biểu thị GDP của quốc gia đó sau t năm. Ta có $S(t)=\int q(t)dt$
- Năm 2004 xem như $t = 0$, năm 2015 ứng với $t = 11$. Giá trị tăng thêm GDP của quốc gia đó từ năm 2004 đến 2015 được tính theo công thức

$$\int_0^{11} q(t)dt = S(11)-S(0).$$

- Vậy tổng giá trị GDP của quốc gia đó tính đến năm 2015 bằng giá trị GDP năm 2004 cộng thêm GDP từ năm 2004 đến đầu năm 2015, tính theo công thức $\int_0^{11} q(t)dt+100$.

Hướng dẫn giải

- Nguyên hàm của $q(t)=30+\frac{1}{2}\sqrt{5+t}$ là hàm số $S(t)$ mô tả GDP của quốc gia sau t năm (được tính từ năm 2004).
- GDP tăng thêm tính từ năm 2004 ($t = 0$) đến đầu năm 2015 ($t = 11$) là:

$$\int_0^{11} q(t)dt = \int_0^{11}\left(30+\frac{1}{2}\sqrt{5+t}\right)dt = \left(30t+\frac{\sqrt{(5+t)^3}}{3}\right)\Bigg|_0^{11} \approx 347,6 \text{ tỷ USD}$$

- Như vậy, tổng giá trị GDP tính đến đầu năm 2015 bằng
  $347,6+100=447,6$ tỷ USD.

■ **Bình luận:** ***Qua bài toán này ta cần lưu ý:***

Một là, ta cần hiểu đúng ý nghĩa của hàm $S(t)=\int q(t)dt$, đó là sản lượng GDP của quốc gia làm ra tính đến năm thứ t, chứ không phải là sản lượng GDP làm được trong năm thứ t, hai điều đó hoàn toàn khác nhau.

Hai là, nếu hiểu được $S(t)$ là sản lượng GDP của quốc gia tính đến năm thứ t thì giá trị GDP tính đến đầu năm 2015 sẽ bằng GDP tính đến năm 2004 cộng với lượng GDP tăng thêm từ năm 2004 đến đầu năm 2015.

Tìm hiểu về ***chi phí cận biên*** **và** ***doanh thu cận biên*** **trong sản xuất kinh tế**

- Để sản xuất x sản phẩm A, ta cần chi phí là m đồng. Nếu ta tăng sản lượng sản xuất lên 1 đơn vị thành $x + 1$ sản phẩm thì cần chi phí tương ứng là n đồng. Khi đó,

mức tăng chi phí $n - m$ được gọi là chi phí cận biên khi sản xuất $x + 1$ sản phẩm (tăng từ x lên $x + 1$ sản phẩm). Ta xem ví dụ minh họa bằng bảng sau:

Số lượng sản phẩm sản xuất	Tổng chi phí (đồng)	Chi phí cận biên (đồng)
0	0	
1	15	**15**
2	26	**11**
3	34	**8**
4	41	**7**
5	49	**8**
6	59	**10**
7	47	**12**
8	61	**14**
9	77	**16**
10	95	**18**

- Theo bảng trên, khi sản xuất tăng từ 0 đến 1 sản phẩm thì chi phí tăng thêm 15 đồng, suy ra chi phí cận biên của 1 sản phẩm được sản xuất là 15 đồng. Tương tự, khi sản xuất tăng từ 1 đến 2 sản phẩm thì chi phí tăng thêm 11 đồng, đó chính là chi phí cận biên khi sản xuất 2 sản phẩm,...
- Nếu gọi $q(x)$ là ***chi phí cận biên*** khi sản xuất x sản phẩm thì ***nguyên hàm*** của $q(x)$ chính là ***tổng chi phí*** để sản xuất x sản phẩm.
- Số liệu bảng trên là một ví dụ trong thực tế, khi sản xuất tăng từ 1 đến 4 sản phẩm thì chi phí cận biên sẽ giảm nhưng khi số lượng sản phẩm làm ra tăng từ 5 trở lên thì chi phí cận biên bắt đầu tăng trở lại. Một trong những lí do dẫn đến hiện tượng này là khi số lượng sản phẩm tăng từ 1 đến 4 thì công ty sử dụng công nghệ đơn giản nên tiết kiệm được chi phí, nhưng khi số lượng sản phẩm sản xuất tăng cao thì chi phí quản lí sẽ tăng cao.
- Ngoài ra, khi tính toán số lượng sản phẩm cần sản xuất, công ty còn phải dự báo được số lượng sản phẩm bán ra được và doanh thu có tăng thêm nhiều hay ít khi tăng số lượng sản phẩm sản xuất.
- Doanh thu cận biên là mức doanh thu tăng thêm khi tăng lượng bán thêm 1 sản phẩm, ta có ví dụ qua bảng sau:

Số lượng sản phẩm bán được	Đơn giá	Tổng doanh thu	Doanh thu cận biên
0	-	0	
1	21	21	21
2	20	40	19
3	19	57	17
4	18	72	15
5	17	85	13

6	16	96	11
7	15	105	9
8	14	112	7
9	13	117	5
10	12	120	3

- Theo bảng trên, khi tăng số lượng bán từ 1 đến 2 sản phẩm, thì doanh thu tăng từ 21 đồng đến 40 đồng, như vậy mức tăng thêm 40 - 21 = 19 đồng gọi là doanh thu cận biên khi bán được 2 sản phẩm, tương tự doanh thu cận biên khi bán được 4 sản phẩm là 15 đồng.
- **Gọi $f(x)$ là hàm doanh thu cận biên khi bán được x sản phẩm, khi đó nguyên hàm của $f(x)$ chính là tổng doanh thu khi bán được x sản phẩm.**
- Trong thực tế không phải sản xuất càng nhiều sản phẩm thì doanh thu cận biên và tổng doanh thu sẽ càng cao, mà nó phụ thuộc vào nhu cầu có khả năng thanh toán của người tiêu dùng. Mặt khác, nhu cầu có khả năng thanh toán của người tiêu dùng lại tùy thuộc vào giá sản phẩm, nếu giá sản phẩm thấp thì người tiêu dùng sẽ mua nhiều, còn giá sản phẩm tăng cao thì người tiêu dùng sẽ mua ít lại. Vì vậy, một doanh nghiệp thường hạ giá bán khi số lượng sản phẩm bán ra tăng lên, điều này dẫn đến mối quan hệ giữa chi phí cận biên và doanh thu cận biên, đồng thời ảnh hưởng đến số lượng sản phẩm cần sản xuất.
- Để hiểu rõ hơn điều mới nói, chúng ta quan sát cả 2 bảng trên, khi số sản phẩm tăng lên 2 thì chi phí tăng thêm *11* đồng, doanh thu tăng thêm *19* đồng, vậy công ty có lời thêm *19 - 11 = 8* đồng, điều này khuyến khích công ty sản xuất *2* sản phẩm. Khi tăng số lượng sản phẩm từ 5 đến 6 thì chi phí tăng thêm *10* đồng, doanh thu tăng thêm *11* đồng, khi đó công ty chỉ lời thêm *11 - 10 = 1* đồng, thấp hơn nhiều so với mức tăng từ 1 lên 2 sản phẩm. Và khi tăng số lượng sản phẩm từ 7 lên 8 sản phẩm thì chi phí tăng thêm *14* đồng, nhưng doanh thu chỉ tăng thêm 7 đồng, vậy doanh thu đã giảm đi *7 - 14 = -7* đồng. Như vậy , công ty sẽ tính toán số lượng sản phẩm sản xuất sao cho doanh thu cận biên lớn hơn chi phí cận biên, thậm chí mức chênh lệch giữa doanh thu cận biên và chi phí cận biên đủ lớn để công ty *"có động lực"* sản xuất nhiều sản phẩm.

Bài toán 3: Một công ty sản xuất sản phẩm A, giả sử chi phí cận biên khi x sản phẩm được sản xuất là $q(x)=x^3-6x^2+40$ USD/ sản phẩm. Hỏi tổng chi phí sản xuất sẽ tăng lên bao nhiêu nếu sản phẩm sản xuất ra tăng từ 3 sản phẩm đến 7 sản phẩm?

■ **Phân tích bài toán**

- Chi phí cận biên khi x sản phẩm được sản xuất là $q(x)=x^3-6x^2+40$ USD/ sản phẩm. Nguyên hàm của $q(x)=x^3-6x^2+40$ là hàm *S(x)* mô tả tổng chi phí khi sản xuất x sản phẩm, ta có $S(x)=\int q(x)dx$

- Vậy khi tăng sản lượng sản xuất từ 3 đến 7 sản phẩm thì cần thêm chi phí $\int_3^7 q(x)dx$

Hướng dẫn giải

- Gọi $S(x)$ là hàm tổng chi phí khi sản xuất x sản phẩm, ta có $S'(x) = q(x)$.
- Chi phí tăng thêm khi tăng sản lượng sản xuất từ 3 sản phẩm đến 7 sản phẩm là

$$\int_3^7 q(x)dx = \int_3^7 \left(x^3 - 6x^2 + 40\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 40x\right)\Bigg|_3^7 = 108\,\text{USD}.$$

■ **Bình luận:** ***Qua bài toán này ta cần lưu ý:***

Một là, để giải được bài toán này ta cần hiểu rõ khái niệm chi phí cận biên là mức chi phí thay đổi trong tổng chi phí khi sản xuất tăng thêm 1 đơn vị sản phẩm.

Hai là, nguyên hàm của hàm chi phí cận biên $q(x)$ chính là hàm tổng chi phí S(x) khi sản xuất x đơn vị sản phẩm.

Bài toán 4: Một công ty có doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng x được xác định dưới dạng hàm số $f(x) = \frac{24}{x+1}(x > 0)$, với x là số lượng sản phẩm được bán ra. Hỏi tổng doanh thu của công ty khi bán ra 100 sản phẩm là bao nhiêu?

■ **Phân tích bài toán**

- Hàm số $f(x) = \frac{24}{x+1}$ là doanh thu cận biên khi bán được x sản phẩm. Ta có nguyên hàm của $f(x)$ là hàm tổng doanh thu $F(x)$ khi bán được x sản phẩm. Lập công thức tính $F(x)$
- $F(x) = \int f(x)dx$.
- Dùng điều kiện ban đầu, tổng doanh thu bằng 0 khi chưa bán được sản phẩm ta suy ra hàm $F(x)$.
- Khi đó dễ dàng tính được $F(100)$.

Hướng dẫn giải

- Hàm tổng doanh thu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên ta có

$$F(x) = \int f(x)dx = \int\left(\frac{24}{x+1}\right)dx = 24\ln|x+1| + C.$$

[redacted]

Hàm doanh thu cận biên $f(x) = 58 - x$.

Bài toán 5: Một doanh nghiệp sản xuất mặt hàng với chi phí cận biên được mô tả bởi hàm số $f(x)=\frac{1}{10}\left(x^2-16x+93\right)$, với x là số sản phẩm sản xuất. Giả sử rằng doanh nghiệp bán được hết số lượng sản phẩm sản xuất được. Biết rằng doanh thu cận biên được mô tả bởi hàm số $g(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5$, với x là số lượng sản phẩm được bán ra. Giả sử rằng tổng chi phí khi chưa sản xuất sản phẩm nào là 0 đồng và tổng doanh thu khi chưa bán được sản phẩm nào là 0 đồng.

a) Hỏi khi sản xuất 8 sản phẩm và bán hết thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu?

b) Lập bảng tính chi phí cận biên và doanh thu cận biên khi sản xuất và bán được số lượng từ 10 đến 18 sản phẩm. Hỏi doanh nghiệp có nên tăng sản lượng lên 15 sản phẩm hay không?

■ Phân tích bài toán

- Số tiền lợi nhuận khi sản xuất và bán hết x sản phẩm sẽ bằng tổng doanh thu khi bán hết x sản phẩm trừ đi tổng chi phí sản xuất x sản phẩm đó.

[redacted]

- Hàm $G(x)$ là nguyên hàm của $g(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5$, kết hợp với điều kiện ban đầu $G(0)=0$, ta suy ra biểu thức $G(x)$.

Hướng dẫn giải

[redacted]

- Vì $F(0)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{10}\left(\frac{0^3}{3}-8.0^2+93.0\right)+C=0 \Leftrightarrow C=0$. Suy ra

$$F(x)=\frac{1}{10}\left(\frac{x^3}{3}-8x^2+93x\right).$$

- Nguyên hàm của hàm doanh thu cận biên $g(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5$ là hàm tổng doanh thu $G(x)$

$$G(x)=\int g(x)dx=\int\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5\right]dx=\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5x+C.$$

- Kết hợp điều kiện ban đầu $G(0)=0$ suy ra

$$\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}+5.0+C=0 \Leftrightarrow C=-\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}$$

$$G(x)=\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5x-\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}.$$

- Lợi nhuận khi sản xuất và bán hết 8 sản phẩm là $G(8)-F(8)=21,96$ đồng.

b) Giả sử rằng số sản phẩm bán được bằng số sản phẩm sản xuất, ta có bảng sau

Số lượng sản phẩm	**Chi phí cận biên**	**Doanh thu cận biên**	**Lợi nhuận tăng thêm**
10	3,3	5,64	**2,34**
11	3,8	5,51	**1,71**
12	4,5	5,41	**0,91**
13	5,4	5,33	**-0,07**
14	6,5	5,26	**-1,24**
15	7,8	5,21	**-2,59**
16	9,3	5,17	**-4,13**
17	11	5,13	**-5,87**
18	12,9	5,11	**-7,79**

- Quan sát bảng số liệu trên, khi số lượng sản phẩm sản xuất và bán ra tăng đến 13 sản phẩm thì ***mức tăng lợi nhuận bị âm***. Như vậy, doanh nghiệp chỉ nên sản xuất tối đa 12 sản phẩm, không nên sản xuất đến 15 sản phẩm.

Bài toán 6: Tại 1 công ty, giá bán P của một đơn vị sản phẩm của một mặt hàng phụ thuộc vào số lượng sản phẩm x được bán. Ước tính rằng nếu sản phẩm được bán ra với tốc độ thay đổi của giá mỗi sản phẩm được tính theo công thức:

$\frac{-214x}{\sqrt{24+x^2}}$ **(USD/sản phẩm)**

Hãy xác định giá khi 10 sản phẩm bán ra, biết nếu rằng một sản phẩm bán ra giá bán sẽ là 5600 (USD).

Hướng dẫn giải:

- Gọi x là số sản phẩm bán ra và $P(x)$ là giá bán của một sản phẩm.
- Theo đề ta có $P'(x)=\frac{-214x}{\sqrt{24+x^2}}$.
- Suy ra $P(x)=\int P'(x)dx=\int\frac{-214x}{\sqrt{24+x^2}}dx=-214\int\frac{x}{\sqrt{24+x^2}}dx$.
- Đặt $t=24+x^2 \Rightarrow dt=2xdx$.
- Suy ra $P(x)=-214\int\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=-214\sqrt{t}+C=-214\sqrt{24+x^2}+C$.
- Nếu chỉ có 1 sản phẩm được bán ra thì giá là:

$P(1) = 5600 \Leftrightarrow 5600 = -214\sqrt{24+1} + C \Leftrightarrow C = 6670$.

- Vậy $P(x) = -214\sqrt{24+x^2} + 6670$.
- Giá bán mỗi sản phẩm khi 10 sản phẩm được bán ra là:

$P(10) = -214\sqrt{24+10^2} + 6670 = 4287$ USD.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG IV

Câu 1: Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t \ (m/s)$. Hỏi rằng trong 3s trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 16 m B. 130 m C. 170 m D. 45 m.

Câu 2: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = \frac{3}{t+1}(m/s^2)$. Vận tốc ban đầu của vật là 6m/s. Hỏi vận tốc của vật tại giây thứ 10 bằng bao nhiêu?

A. $10m/s$ B. $15{,}2m/s$ C. $13{,}2m/s$ D. $12m/s$

Câu 3: Một xe mô tô phân khối lớn đang chạy với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 3t(m/s^2)$. Hỏi quãng đường của xe đi được trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc?

A. $\frac{3200}{3}$ m/s B. 1500 m/s C. 1200 m/s D. $\frac{4300}{3}$ m/s.

[redacted]

Câu 5: Vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5(m/s)$. Quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là :

A. 36m B. 252m C. 1134m D. 966m.

Câu 6: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1{,}2 + \frac{t^2+4}{t+3}(m/s)$. Quãng đường đi được của vật đó trong 4s đầu tiên bằng bao nhiêu?

A. 18,82m B. 11,81m C. 4,06m D. 7,28m.

[redacted]

Một học sinh tự chế tên lửa và phóng tên lửa từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 20m/s. Giả sử bỏ qua sức cản của gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực.

Dùng dữ liệu này để trả lời câu 8 và 9.

Câu 8: Hỏi sau 2s thì tên lửa đạt đến độ cao là bao nhiêu?

A. 0,45m/s B. 0,4m/s C. 0,6m/s D. 0,8m/s


[redacted]

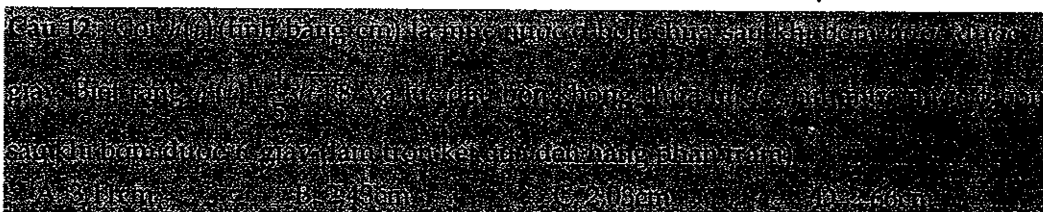
Câu 10: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trong thành phố thì các xe khi dừng lại phải cách nhau một khoảng tối thiểu là 1m. Một xe máy di chuyển trên đường thì gặp đèn đỏ từ xa, người điều khiển xe máy đạp phanh và xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 10 - 5t\ (m/s)$. Hỏi để giữ khoảng cách an toàn, người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng bao xa, biết rằng ngay lúc đạp phanh thì xe phía trước đang đứng yên?

A. 9 m B. 10 m C. 11 m D. 12 m.

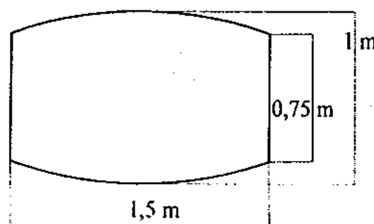
Câu 11: Vi khuẩn HP (Helicobacter pylori) gây đau dạ dày tại ngày thứ t với số lượng là $F(t)$, biết nếu phát hiện sớm khi số lượng vi khuẩn không vượt quá 4.000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết tốc độ phát triển của vi khuẩn tại ngày thứ t là $F'(t) = \dfrac{1000}{2t+1}$ và ban đầu bệnh nhân có 2.000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân có cứu chữa được không?

A. 5433,99 và không cứu được B. 1499,45 và cứu được

C. 283,01 và cứu được D. 3716,99 và cứu được


[redacted]

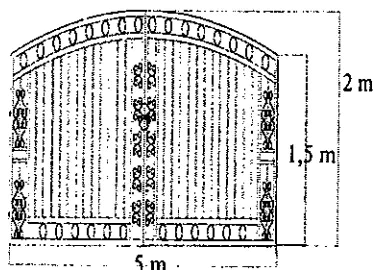
Câu 13: Một quán café muốn làm cái bảng hiệu là một phần của Elip có kích thước, hình dạng giống như hình vẽ và có chất lượng bằng gỗ. Diện tích gỗ bề mặt bảng hiệu là (làm tròn đến hàng phần chục)



A. 1,3 B. 1,4

C. 1,5 D. 1,6.

Câu 14: Anh An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ kế bên, biết đường cong phía trên là một parabol. Giá $1m^2$ cửa rào sắt có giá là 700.000 đồng. Vậy anh An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa rào sắt như vậy. (làm tròn đến hàng nghìn)



A. 6.417.000 đồng. B. 6.320.000 đồng

C. 6.520.000 đồng. D. 6.620.000 đồng.

Câu 15: Trong một mẻ cấy, số lượng ban đầu của vi khuẩn là 500, số lượng này tăng lên theo vận tốc $v(t) = 450e^{1,1257t}$ vi khuẩn trong 1 giờ. Sẽ có bao nhiêu vi khuẩn trong buồng cấy sau 3 giờ?

A. 1.1807. B. 2.1600. C. 1.5809 D. 3.1250.

Câu 16: Chất điểm chuyển động theo một đường thẳng sau t giây đạt được vận tốc $v = t^2.e^{-t} m/s$. Tính quãng đường nó đi được trong t giây đầu tiên?

A. $S(t) = 2 - e^{-3t}(t^2 + 2t)$.

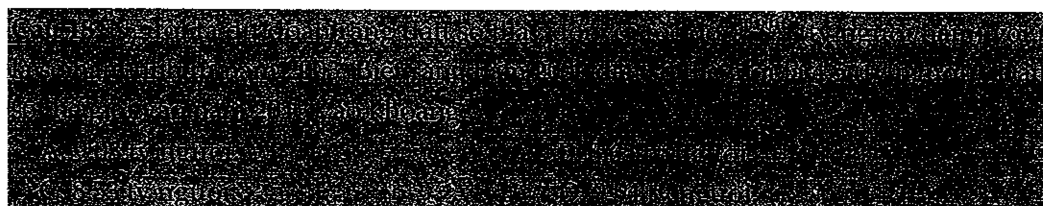
B. $S(t) = 2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2)$.

C. $S(t) = 2 - e^{-t}(t^2 + 3t + 2)$.

D. $S(t) = 1 - e^{-t}(5t^2 + 2t + 2)$.

Câu 17: Công ty vừa đưa vào một dây chuyền sản xuất để chế tạo máy tính mới. Sau vài tuần, sản lượng đạt được $q(t) = 4000\left(1 - \frac{10}{(10-t)^2}\right)$ máy/tuần. Tìm số máy sản xuất được từ tuần thứ ba đến hết tuần thứ tư.

A. 45.000. B. 5.235. C. 6.333. D. 5.315.


[redacted]

Câu 19: Tốc độ thay đổi số dân của một thị trấn kể từ năm 1970 được mô tả bằng công thức $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}$, với t là thời gian tính bằng năm (thời điểm $t = 0$ ứng với năm 1970). Biết rằng số dân của thị trấn vào năm 1970 là 2000 người. Hỏi số dân của thị trấn đó vào năm 2008 ước tính là bao nhiêu?

A. 32,1 nghìn người.

B. 23,21 nghìn người.

C. 15,32 nghìn người.

D. 20,41 nghìn người.

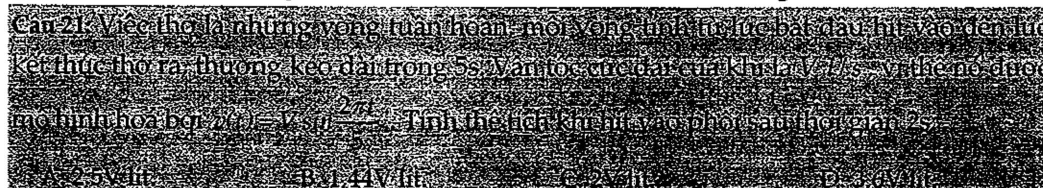
Câu 20: Hưởng ứng phong trào "Ngày vì người nghèo" do Đài truyền hình Việt Nam tổ chức, tối ngày 10/04/2010 chương trình "Góp sức vì người nghèo" đã được tổ chức tại 3 điểm cầu truyền hình tại 3 thành phố lớn của cả nước là: TP Hà Nội, TP Đà Nẵng, TP Hồ Chí Minh và được truyền hình trực tiếp trên song VTV3 – Đài truyền hình Việt Nam.Trong chương trình này, các cá nhân tổ chức trong và ngoài nước sẽ có dịp được chung tay góp sức giúp đỡ cho người nghèo qua hình thức nhắn tin hoặc quyên góp tiền trực tiếp cho ban tổ chức chương trình. Theo ước tính, sau t (giờ) số tiền quyên góp thay đổi với tốc độ $300t\ e^{-0,1t}$ (triệu đồng/giờ). Số tiền có được sau 5 giờ đầu tiên quyên góp là:

A. 321 triệu đồng.

B. 3.209 triệu đồng.

C. 2706,12 triệu đồng.

D. 9.801 triệu đồng.


[redacted]

Câu 22: Giả sử rằng sau t năm, vốn đầu tư của một doanh nghiệp phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P'(t)=126+t^2$ (triệu đồng/năm). Hỏi sau 10 năm đầu tiên thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu (đơn vị triệu đồng)?

A. $\frac{4780}{3}$. B. 1235. C. $\frac{3257}{3}$. D. 5020.

[redacted]

Câu 24: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=\frac{2}{t+2}(m/s^2)$. Vận tốc ban đầu của vật là 7m/s. Hỏi vận tốc của vật tại giây thứ 5 bằng bao nhiêu ?

A. $3,89\,(m/s)$. B. $9,51\,(m/s)$. C. $7,38\,(m/s)$. D. $10,89\,(m/s)$.

[redacted]

Câu 26: Vi khuẩn HP (Helicobacter pylori) gây đau dạ dày tại ngày thứ t với số lượng là $F(t)$, biết nếu phát hiện sớm khi số lượng vi khuẩn không vượt quá 5.000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết tốc độ phát triển của vi khuẩn tại ngày thứ t là $F'(t)=\frac{1000}{t+1}$ và ban đầu bệnh nhân có 2.000 con vi khuẩn. Sau 10 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân có cứu chữa được không?

A. 5433,99 và không cứu được. B. 5044,52 và không cứu được.

C. 4320,01 và cứu được D. 2397,89 và cứu được.

Câu 27: Một ô tô đang chuyển động với vận tốc $12m/s$ thì người lái xe bất ngờ tăng tốc cho xe chạy nhanh dần đều, sau $15s$ thì xe đạt vận tốc $15m/s$. Tính quãng đường xe đi được sau $30s$ kể từ khi tăng tốc

A. 270m. B. 450m. C. 360m. D. 540m.

Câu 28: Một lực có độ lớn 40 N (newton) cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 10cm lên 15cm. Biết rằng theo định luật *Hooke* trong Vật lý, khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm x (đơn vị độ dài) so với độ dài tự nhiên của lò xo thì lò xo trì lại (chống lại) với một lực cho bởi công thức $f(x)=kx\,(N)$, trong đó k là hệ số đàn hồi (hoặc độ cứng) của lò xo. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ 15 cm đến 20cm? (kí hiệu $J\,(Jun)$ là đơn vị của công)

A. $3,00J$. B. $1,56J$. C. $2,56J$. D. $3,18J$.

Câu 29: Công ty vừa đưa vào một dây chuyền sản xuất để chế tạo máy tính mới. Sau vài tuần, sản lượng đạt được $q(t)=2000\left(1-\frac{10}{(10-t)^2}\right)$ máy/tuần. Tìm số máy sản xuất được từ tuần thứ ba đến hết tuần thứ tư.

A. 147 máy. B. 1523 máy. C. 1470 máy. D. 3166 máy.

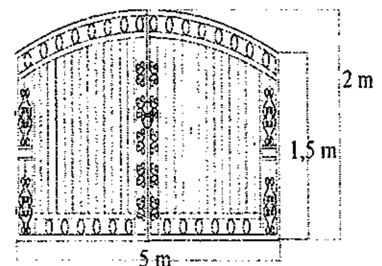
[redacted]

Câu 31: Một chiếc xe thể thao hiệu Lamborghini Aventador chạy trên một đường đua thẳng có độ dài 4km. Xe tăng tốc từ 0km/h đến 100km/h trong 3 giây đầu tiên đi hết 260m và sau đó xe chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $20m/s$. Tính thời gian để xe hoàn thành đường đua biết vận tốc của chuyển động nhanh dần đều có công thức $v=at+v_o$ với a,v_o là gia tốc và vận tốc đầu.

A. 18 s. B. 21 s. C. 11 s. D. 14 s.

[redacted]

Câu 33: Anh Lâm Phong muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ kế bên, biết đường cong phía trên là một parabol. Giá $1m^2$ cửa rào sắt có giá là 600.000 đồng. Vậy anh Phong phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa rào sắt như vậy. (làm tròn đến hàng chục nghìn)?



A. 5.420.000 đồng. B. 5.520.000 đồng.

C. 5.500.000 đồng. D. 5.320.000 đồng.

Câu 34: Một mạch kín gồm một nguồn điện có suất điện động biến thiên theo thời gian $e=10cos(100\pi t)(V)$ và điện trở trong không đáng kể, nối với mạch ngoài có một điện trở $R=50\Omega$. Tính điện lượng chuyển qua điện trở trong thời gian từ $t=0$ đến $t=\frac{1}{600}s$?

A. $3,18.10^{-5}C$. B. $15,9\mu C$. C. $3,18\ nC$. D. $1,59\ nC$.

Câu 35: Một hạt proton di chuyển trong điện trường có biểu thức gia tốc (theo m/s^2) là $a=-\frac{20}{(2t+1)^2}$ với t tính bằng giây. Tìm hàm vận tốc v theo t, biết rằng $t=0$ thì $v=40\ m/s$.

A. $v(t)=30+\frac{10}{2t+1}(m/s)$. B. $v(t)=20+\frac{10}{2t+1}(m/s)$.

C. $v(t)=30+\frac{20}{2t+1}(m/s)$. D. $v(t)=20+\frac{30}{2t+1}(m/s)$.

Câu 36: Trong mạch điện của thiết bị điện tử, cường độ dòng điện (đơn vị mA) là một hàm số theo thời gian t là $i(t)=0,3-0,2t\,(mA)$. Tổng điện tích đi qua một điểm trong mạch trong giây 0,05s là bao nhiêu, biết rằng tại thời điểm ban đầu thì lượng điện tích chạy qua dây dẫn bằng 0?

A. $0,015\,mC$. B. $0,015\,\mu C$. C. $0,03\,\mu C$. D. $0,03\,mC$.

Câu 37: Hiệu điện thế đi qua tụ điện có điện dung $C=8,5\,nF$ đặt trong mạch thu sóng FM gần bằng 0. Nếu có cường độ dòng điện $i=0,042t\,(mA)$ nạp vào tụ. Tìm hiệu điện thế sau $2\mu s$, biết rằng hiệu điện thế tại thời điểm t được tính theo công thức $U(t)=\frac{q(t)}{C}$ với $q(t)$ là điện lượng qua tiết diện dây dẫn trong thời gian t.

A. $4,941\,nV$. B. $3,294\,nV$. C. $13,18\,nV$. D. $9,882\,nV$.

Câu 38: Một lực 12 N nén lò xo từ chiều dài tự nhiên là 18 cm xuống còn 16 cm. Hỏi công sinh ra là bao nhiêu nếu ta tiếp túc nén lò xo từ 16 cm xuống 14 cm ?

A. 3,6 N. B. 1,8 N. C. 0,9 N. D. 1,2 N.


[redacted]

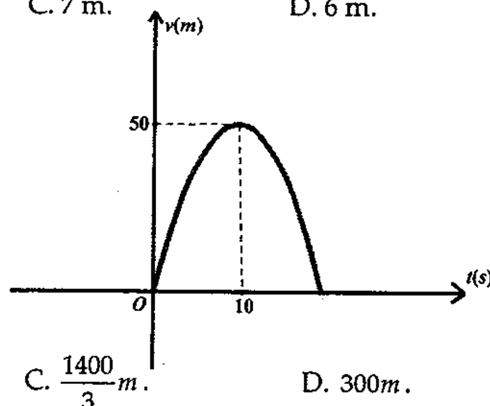
Câu 40: Hai người chạy đua xuất phát cùng lúc với vận tốc 0 m/s trên một đoạn đường 400m. Biết độ tăng vận tốc của 2 người lần lượt cho bởi hai hàm số $f(t)=\frac{3}{100}t+\frac{1}{10}\,(m/s^2)$ và $g(t)=\frac{8}{25}\,(m/s^2)$ (t là thời gian, tính theo giây). Hỏi thời gian về đích của hai người chênh lệch bao nhiêu giây?

A. 8 giây. B. 10 giây. C. 40 giây. D. 1.090 giây.

Câu 41: Một xe máy đang chạy với vận tốc 8 m/s thì tài xế đạp phanh; từ thời điểm đó, xe máy chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-4t+8(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe máy còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 8 m. B. 10 m. C. 7 m. D. 6 m.

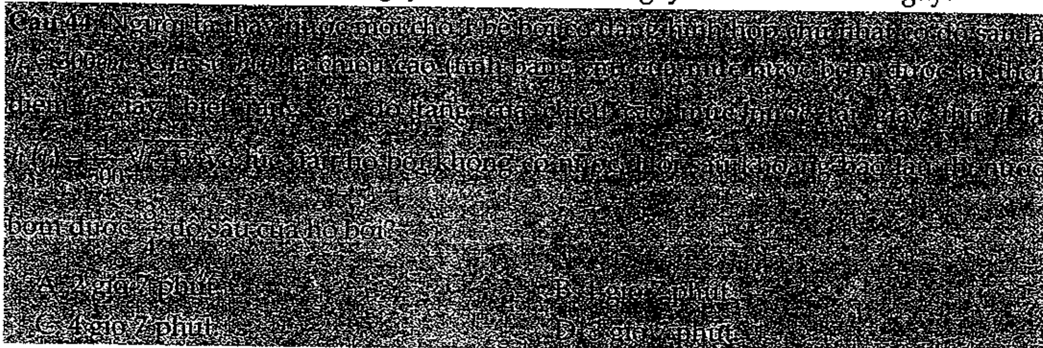
Câu 42: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong Parabol có hình bên. Biết rằng sau 10 s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 50 m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?



A. $\frac{1000}{3}m$. B. $\frac{1100}{3}m$. C. $\frac{1400}{3}m$. D. $300m$.

Câu 43: Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t)=\dfrac{1000}{(1+0,25t)^2}$, $t\ge 0$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t. Số lượng vi khuẩn ban đầu là 600 con trên mỗi ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 4000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lí và thay nước mới cho hồ bơi.

A. 23 ngày. B. 22 ngày. C. 24 ngày. D. 25 ngày.



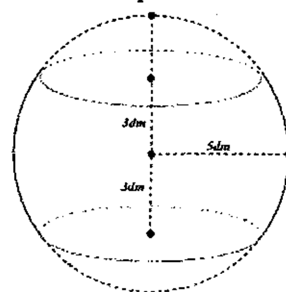
Câu 45: Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện A đã xả lũ trong 30 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $v(t)=10t+500\left(m^3/s\right)$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì có hồ chứa nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

A. 17,1 triệu khối nước.
B. 16,1 triệu khối nước.
C. 18,1 triệu khối nước.
D. 19,1 triệu khối nước.

Câu 46: Sau t giờ làm việc một người thợ có thể sản xuất với tốc độ là $q(t)=100+e^{-0,5t}$ đơn vị sản phẩm trong 1 giờ. Giả sử người đó bắt đầu làm việc từ lúc 7 giờ sáng. Hỏi người đó sẽ sản xuất được bao nhiêu đơn vị sản phẩm giữa 8 giờ sáng và 11 giờ trưa?

A. 401 đơn vị sản phẩm.
B. 403 đơn vị sản phẩm.
C. 601 đơn vị sản phẩm.
D. 501 đơn vị sản phẩm.

Câu 47: Một khối cầu có bán kính 5 dm, người ta cắt bỏ 2 phần bằng 2 mặt phẳng vuông góc bán kính và cách tâm 3 dm để làm một chiếc lu đựng (như hình vẽ). Thể tích của cái lu là:



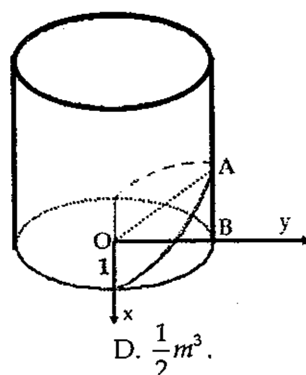
A. $132\pi\left(dm^3\right)$. B. $41\pi\left(dm^3\right)$.

C. $\dfrac{100\pi}{3}\left(dm^3\right)$. D. $43\pi\left(dm^3\right)$.

Câu 48: Một cái nêm được tạo thành bằng cách cắt ra từ một khúc gỗ hình trụ có bán kính bằng $4\ (cm)$ bởi hai mặt phẳng gồm mặt phẳng thứ nhất vuông góc với trục của hình trụ, mặt phẳng thứ hai cắt mặt phẳng thứ nhất dọc theo một đường kính của hình trụ và góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 30^0. Tính thể tích cái nêm đó ?

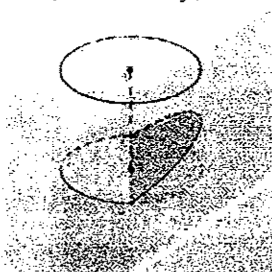
A. $\dfrac{64\sqrt{3}}{9}\left(cm^3\right)$. B. $\dfrac{128\pi\sqrt{3}}{9}\left(cm^3\right)$. C. $\dfrac{128\sqrt{3}}{9}\left(cm^3\right)$. D. $\dfrac{64\pi\sqrt{3}}{9}\left(cm^3\right)$.

Câu 49: Một cái nêm được tạo thành bằng cách cắt ra từ một khúc gỗ hình trụ có bán kính bằng $1(m)$ bởi hai mặt phẳng gồm mặt phẳng thứ nhất vuông góc với trục của hình trụ, mặt phẳng thứ hai cắt mặt phẳng thứ nhất dọc theo một đường kính của hình trụ và góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 45^0. Tính thể tích cái nêm đó.



A. $\frac{1}{3}m^3$.
B. $\frac{2}{3}m^3$.
C. $\frac{1}{4}m^3$.
D. $\frac{1}{2}m^3$.

Câu 50: Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30 cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc 45^0 để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây).


Hình 1


Hình 2

Kí hiệu V là thể tích của hình nêm (hình 2). Tính thể tích của V.

A. $V = 2250\left(cm^3\right)$.
B. $V = \frac{225\pi}{4}\left(cm^3\right)$.
C. $V = 1250\left(cm^3\right)$.
D. $V = 1350\left(cm^3\right)$.

Câu 51: Giả sử một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $40m/s$, gia tốc trọng trường là $g = 9{,}8m/s^2$. Quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất gần nhất với giá trị nào sau đây? ***(Trích đề thi thử lần 15 group 3K)***

A. 67 m.
B. 101 m.
C. 163 m.
D. 197 m

Câu 52: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ôtô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m. Một ôtô A đang chạy với vận tốc $12m/s$ bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bằng công thức $v_A(t) = 12 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian t tính bằng giây. Hỏi rằng để 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu ? *(Trích đề thi thử lần 15 group 3K)*

A. 17 m.
B. 18 m.
C. 19 m.
D. 20 m

Câu 53: Sau tiếng còi xuất phát của trọng tài, một vận động viên điền kinh chạy với vận tốc $v(t)$ thay đổi theo thời gian t(tính theo giây). Biết rằng gia tốc của vận động

viên trong suốt quãng đường chạy là $a(t)=\frac{1}{20}\left(-t^3+30t\right)$, đơn vị là m/s². Vận tốc của vận động viên đạt được tại thời điểm $t=2s$ là

A. 0,9 m/s. B. 2,8 m/s. C. 10,9 m/s. D. 12,8 m/s

HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG IV

Câu 1: Đáp án D

Phân tích:

- Vật chuyển động chậm dần với vận tốc tại giây thứ t là $v(t)=160-10t\ (m/s)$. Ta biết rằng quãng đường vật đi được $s(t)$ chính là nguyên hàm của vận tốc $v(t)$.
- Khi vật dừng hẳn là thời điểm t sao cho $v(t)=0 \Leftrightarrow 160-10t=0 \Leftrightarrow t=16(s)$. Suy ra sau khi bắt đầu chuyển động chậm dần thì vật đi thêm được trong thời gian 16s thì dừng lại.
- Vậy quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 3s trước khi dừng hẳn chính là tích phân của hàm $v(t)=160-10t\ (m/s)$ từ $t=13$s đến khi $t=16$s.

Hướng dẫn giải:

- Vật chuyển động chậm dần cho đến khi dừng hẳn thì $v(t)=0 \Leftrightarrow 160-10t=0 \Leftrightarrow t=16(s)$.
- Quãng đường vật đi được từ giây thứ 13 đến giây thứ 16 là $S=\int_{13}^{16} v(t)dt=\int_{13}^{16}(160-10t)dt=45m$.

Vậy chọn đáp án D.

Bình luận: Trong câu hỏi này, các em cần nhớ rằng: *Đạo hàm của quãng đường đi được s(t) chính là vận tốc v(t) của vật tại thời điểm t, và ngược lại, nguyên hàm của vận tốc v(t) chính là quãng đường s(t). Quãng đường đi được của vật trong khoảng thời gian nào bằng tích phân của hàm vận tốc v(t) khi biến t chạy trong khoảng thời gian đó.*

Câu 2: Đáp án A

- Đề bài cho biểu thức gia tốc của vật chuyển động là $a(t)=\frac{3}{t+1}(m/s^2)$.
- Ta biết rằng vận tốc chuyển động $v(t)$ của vật chính là nguyên hàm của gia tốc $a(t)$.
- Từ đó ta lập công thức tính $v(t)=\int a(t)dt$, kết hợp với điều kiện vận tốc ban đầu $v_0=6m/s$.
- Suy ra công thức tính vận tốc $v(t)$ của vật tại thời điểm t và tính được $v(10)$.

Hướng dẫn giải:

- Vận tốc của vật tại thời điểm t được tính theo công thức
$v(t)=\int a(t)dt=\int \frac{3}{t+1}dt=3\ln|t+1|+C$.

[redacted]

Chọn đáp án C.

Bình luận: Trong câu này các em cần nhớ: *Đạo hàm của vận tốc v(t) tại thời điểm t chính là gia tốc của vật chuyển động tại thời điểm đó.*

Câu 3: Đáp án A

- Xe mô tô tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+3t(m/s^2)$. Vận tốc $v(t)$ chính là nguyên hàm của hàm số $a(t)$.

  $v(t)=\int a(t)dt=\int\left(t^2+3t\right)dt=\frac{t^3}{3}+3\frac{t^2}{2}+C$.

[redacted]

- Mặt khác, đạo hàm của quãng đường *s(t)* chính là vận tốc *v(t)* của xe chuyển động tại thời điểm *t*. Suy ra, quãng đường đi được của xe sau 10s đầu tiên bằng tích phân của hàm $v(t)$ khi biến *t* từ 0s đến 10s.

  $S=\int_0^{10} v(t)dt=\int_0^{10}\left(\frac{t^3}{3}+3\frac{t^2}{2}+10\right)dt=\frac{4300}{3}$ (m).

- Chọn đáp án D.

  Bình luận (nếu có): $v(t)=\int a(t)dt=\int\frac{3}{t+1}dt=3\ln|t+1|+C$ (bỏ đi)

Câu 4: Đáp án B

- Nguyên hàm của vận tốc $v(t)$ chính là quãng đường đi được $s(t)$. Suy ra quãng đường đi được trong khoảng thời gian từ $t=0s$ đến $t=5$s là:

  $S=\int_0^5 v(t)dt=\int_0^5\left(4t^3+2t+3\right)dt=\left(t^4+t^2+3t\right)\Big|_0^5=665$ m.

Câu 5: Đáp án D

[redacted]

Câu 6: Đáp án B

- Quãng đường đi được của vật trong 4 giây đầu tiên là

  $S=\int_0^4 v(t)dt=\int_0^4\left(1,2+\frac{t^2+4}{t+3}\right)dt=...\approx 11,81m$.

Câu 7: Đáp án B

- Vận tốc $v(t)$ chính là nguyên hàm của gia tốc $a(t)$ nên ta có:

$$v(t)=\int a(t)dt=\int\left(-\frac{1}{24}t^3+\frac{5}{16}t^2\right)dt=-\frac{1}{96}t^4+\frac{5}{48}t^3+C.$$



[redacted]

- Vận tốc của vận động viên tại giây thứ 5 là $v(5)=6,51m/s$.

Câu 8: Đáp án B

Xem như tại thời điểm $t_0=0$ thì học sinh phóng tên lửa với vận tốc ban đầu 20m/s. Ta có $s(0)=0$ và $v(0)=20$.

Vì tên lửa chuyển động thẳng đứng nên gia tốc trọng trường tại mọi thời điểm t là $s''(t)=-9,8m/s^2$.

Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc nên ta có vận tốc của tên lửa tại thời điểm t là $v(t)=\int -9,8dt=-9,8t+C_1$

Do $v(0)=20$ nên $v(0)=20\Leftrightarrow -9,8.0+C_1=20\Leftrightarrow C_1=20\Rightarrow v(t)=-9,8t+20$.

Vậy vận tốc của tên lửa sau 2s là $v(2)=-9,8.2+20=0,4$ (m/s).

Câu 9: Đáp án C

Độ cao của tên lửa là nguyên hàm của vận tốc, suy ra

$s(t)=\int v(t)dt=\int(-9,8t+20)dt=-4,9t^2+20t+C_2$

Vì $s(0)=0$ nên $s(0)=-4,9.0^2+20.0+C_2=0\Leftrightarrow C_2=0\Rightarrow s(t)=-4,9t^2+20t$.

Đồ thị của hàm số $s(t)=-4,9t^2+20t$ là đường cong Parabol có đỉnh $I\left(\frac{100}{49};\frac{1000}{49}\right)$ nên tên lửa đạt độ cao lớn nhất là $\frac{1000}{49}$ (m) tại thời điểm $t=\frac{100}{49}(s)$.

Câu 10: Đáp án C

Kể từ lúc đạp phanh (*t* = *0*) đến lúc xe dừng lại thì xe đi được một quãng đường là s. Vì khoảng cách an toàn giữa 2 xe khi dừng lại tối thiểu là 1m nên người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng *s* + *1* (m).

Tại thời điểm $t=0$ thì xe bắt đầu phanh, và xe dừng lại khi vận tốc bằng 0, khi đó $v(t)=0\Leftrightarrow 10-5t=0\Leftrightarrow t=2$.

Trong khoảng thời gian từ $t=0$ s đến $t=2$ s thì xe chạy thêm được quãng đường $s=\int_0^2(10-5t)dt=10$ (m).

Vậy xe nên bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng 11m để giữ khoảng cách an toàn.

Câu 11: Chọn đáp án D

Tốc độ phát triển của vi khuẩn tại ngày thứ t là $F'(t)=\dfrac{1000}{2t+1}$. Suy ra số lượng vi khuẩn vào ngày thứ t được tính theo công thức

$$F(t)=\int F'(t)dt=\int\frac{1000}{2t+1}dt=\frac{1000}{2}\ln|2t+1|+C=500\ln|2t+1|+C.$$

[redacted]

- Số vi khuẩn sau 15 ngày là $F(15)=500\ln|2.15+1|+2000=3716,99$ con và bệnh nhân cứu được.

Câu 12: Chọn đáp án D

- Ta có $h(t)$ là nguyên hàm của $h'(t)=\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$, nên ta có

$$h(t)=\int h'(t)dt=\frac{1}{5}\int\sqrt[3]{t+8}dt=\frac{1}{5}.\frac{(t+8)^{4/3}}{4/3}+C=\frac{3}{20}(t+8)^{\frac{4}{3}}+C.$$

- Lúc đầu bồn không chứa nước nên $h(0)=0\Leftrightarrow\dfrac{3}{20}(0+8)^{\frac{4}{3}}+C=0\Leftrightarrow C=-\dfrac{12}{5}$.

$$h(t)=\frac{3}{20}(t+8)^{\frac{4}{3}}-\frac{12}{5}.$$

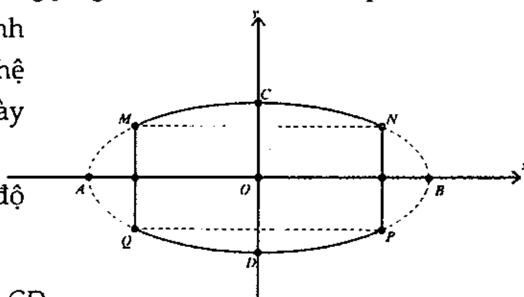
Vậy lượng nước bơm được sau thời gian 6 giây là

$$h(6)=\frac{3}{20}(6+8)^{\frac{4}{3}}-\frac{12}{5}=2,66\,\text{cm}.$$

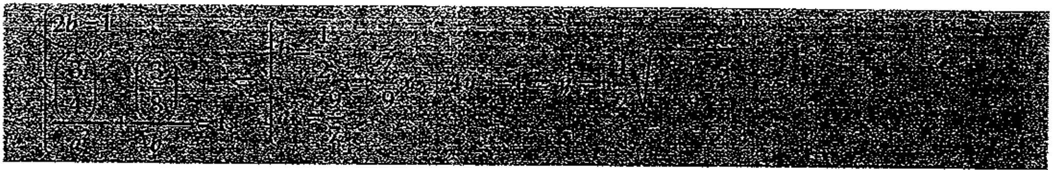
Câu 13: Chọn đáp án B.

■ **Phân tích bài toán:**

- Để tính diện tích của phần gỗ ta cần dùng ý nghĩa hình học của tích phân.
- Đầu tiên ta cần lập phương trình đường Elip biểu thị bảng gỗ. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho bảng gỗ này đối xứng qua 2 trục Ox và Oy.



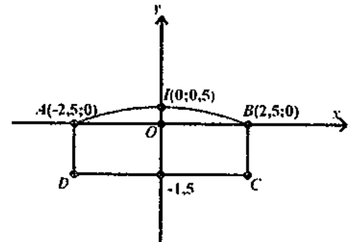
- Theo số liệu đề cho ta có được các độ dài *CD = 1m, MN = 1,5m, NP = 0,75m.*
- Đường Elip $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ có trục nhỏ *CD* = *1m* và đi qua điểm $N\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{8}\right)$, ta có



- Diện tích gỗ cần có được tính theo công thức

$$2\int_{-0,75}^{0,75}\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{7}{9}x^2}dx=\int_{-0,75}^{0,75}\sqrt{1-\frac{7}{9}x^2}dx\approx 1,4\,m^2.$$

Câu 14: Chọn đáp án A.



- Ta mô hình hóa cánh cửa rào bằng hình thang cong ADCB vuông tại C và D, cung AB như hình vẽ.
- Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho 2 điểm A, B nằm trên trục Ox như hình vẽ.
- Vậy diện tích cánh cửa sẽ bằng diện tích hình chữ nhật ABCD cộng thêm diện tích miền cong AIB. Để tính diện tích miền cong AIB ta cần dùng tích phân.
- Đầu tiên ta tìm cách viết phương trình Parabol $y=ax^2+bx+c$ biểu thị cho đường cong AIB. Parabol có đỉnh $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$, và cắt trục hoành tại 2 điểm $A\left(-\frac{5}{2};0\right),B\left(\frac{5}{2};0\right)$

$$\begin{cases}a.0^2+b.0+c=\frac{1}{2}\\-\frac{b}{2a}=0\\a.\left(\frac{5}{2}\right)^2+b.\left(\frac{5}{2}\right)+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=\frac{1}{2}\\b=0\\a=-\frac{2}{25}\end{cases}\Rightarrow y=-\frac{2}{25}x^2+\frac{1}{2}.$$

- Diện tích miền cong AIB được tính bằng công thức $\int_{-2,5}^{2,5}\left(-\frac{2}{25}x^2+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{5}{3}$.
- Suy ra diện tích cánh cửa là $\frac{5}{3}+1,5.5=\frac{55}{6}\left(m^2\right)$.
- Giá $1m^2$ cửa rào sắt giá 700.000. Vậy giá tiền cửa rào sắt là 6.416.666

Câu 15: Chọn đáp án A

- Gọi $S(t)$ là số lượng vi khuẩn trong buồng cấy sau t giờ. Ta có $S(t)$ là nguyên hàm của hàm vận tốc $v(t)$

$$S(t)=\int v(t)dt=\int 450e^{1,1257t}dt=450.\frac{1}{1,1257}.e^{1,1257t}+C.$$

[redacted]

- Số vi khuẩn trong buồng cấy sau 3 giờ

$$S(3) = 450.\frac{1}{1,1257}.e^{1,1257.3} + 100,25 = 11807$$

Câu 16: Chọn đáp án B

[redacted]

- Dùng phương pháp nguyên hàm từng phần ta tính được

$$S(t) = \int v(t)dt = \int (t^2.e^{-t})dt = 2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2).$$

Câu 17: Chọn đáp án C

- Số lượng máy tính từ đầu tuần thứ 3 đến hết tuần thứ 4 là:

$$\int_2^4 4000\left(1 - \frac{10}{10 - t^2}\right)dt = 4000t\Big|_2^4 + \frac{40000}{t-10}\Big|_2^4 \approx 6333$$

Câu 18: Chọn đáp án D

- Gọi $P(t)$ là dân số thế giới sau t năm tính từ 2003.
- Khi ấy theo đề ra ta có $P'(t) = e^{0.001t}$. Suy ra

$$P(t) = \int P'(t)dt = \int P'(t) = \int e^{0.001t}dt = \frac{1}{0,001}e^{0.001t} + C.$$

- Dân số năm 2009 (ứng với t =) là 4,5 tỷ người nên $P(6) = 4,5$

$$\Rightarrow P(6) = 4,5 \Leftrightarrow 4,5 = 1000e^{0.001.6} + C \Leftrightarrow C = 4,5 - 1000e^{0.001.6}.$$

- Do đó $P(t) = \frac{1}{0,001}e^{0.001.t} + 4,5 - 1000e^{0.001.6}$.
- Suy ra $P(11) = \frac{1}{0,001}e^{0.001.11} + 4,5 - 1000e^{0.001.6} = 9,54$.
- Vậy dân số thế giới năm 2013 là 9,54 (tỷ người).

Câu 19: Chọn đáp án B

- Tốc độ thay đổi số dân của thị trấn vào năm thứ *t* là $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}$. Suy ra nguyên hàm của $f'(t)$ là hàm số $f(t)$ mô tả số dân của thị trấn vào năm thứ *t. Ta có* $f(t) = \int f'(t)dt = \int \frac{120}{(t+5)^2}dt = \frac{-120}{t+5} + C$.

[redacted]

$$\Rightarrow f(t) = \frac{-120}{t+5} + 26.$$

- Vậy số dân của thị trấn vào năm 2008 (ứng với $t = 38$) là

$f(28) = \frac{-120}{38+5} + 26 = 23,21$ ngàn người.

Câu 20: Chọn đáp án C

- Gọi $M(t)$ là số tiền có được sau t (giờ) thực hiện việc quyên góp.
- Khi ấy theo đề ta có $M'(t)=300t.e^{-0.1t}$.

  Suy ra $M(t)=\int M'(t)dt=\int 300t.e^{-0.1t}dt$.

[redacted]

- Lúc ban đầu (t = 0) thì số tiền quyên góp là

  $M(0)=0\Leftrightarrow \dfrac{-3000}{0,1}+C=0\Leftrightarrow C=30000$.
- Do đó $M(t)=-3000t.e^{-0.1t}-30000.e^{-0.1t}+30000$.
- Sau 5 giờ số tiền quyên góp được là

  $M(5)=-30005.e^{-0,1.5}-30000.e^{-0,1.5}+30000=2706,12$ triệu đồng.

Câu 21: Chọn đáp án B

- Vận tốc của khí hít vào được mô hình bởi công thức $v(t)=V\sin\dfrac{2\pi t}{5}$. Suy ra lượng khí hít vào sau 2 giây là:

  $N(2)=\int_0^2 v(x)dx=\int_0^2 V\sin\dfrac{2\pi t}{5}dt=\dfrac{5V}{2\pi}\left(1-\cos\dfrac{2\pi.2}{5}\right)=1,44V$ lít khí.

Câu 22: Chọn đáp án A.

- Gọi $P(t)$ là lợi nhuận phát sinh của vốn sau t năm đầu tư. Ta có $P(t)$ là nguyên hàm của hàm tốc độ $P'(t)$.
- Lợi nhuận phát sinh sau 10 năm đầu tiên là:

  $\int_0^{10} P'(t)dt=\int_0^{10}\left(126+t^2\right)dt=\dfrac{4780}{3}$ (triệu đồng).

Câu 23: Chọn đáp án C.

[redacted]

- Khi vật dừng hẳn là thời điểm t sao cho $v(t)=0\Leftrightarrow 150-10t=0\Leftrightarrow t=15(s)$. Suy ra sau khi bắt đầu chuyển động chậm dần thì vật đi thêm được trong thời gian 16s thì dừng lại.
- Vậy quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 4s trước khi dừng hẳn chính là tích phân của hàm $v(t)=150-10t$ (m/s) từ $t=11$s đến khi $t=15$s.

Hướng dẫn giải:

- Vật chuyển động chậm dần cho đến khi dừng hẳn thì

$v(t)=0 \Leftrightarrow 150-10t=0 \Leftrightarrow t=15(s)$.

[redacted]

Câu 24: Chọn đáp án B.

- Đề bài cho biểu thức gia tốc của vật chuyển động là $a(t)=\dfrac{2}{t+2}(m/s^2)$.
- Ta biết rằng vận tốc chuyển động *v(t)* của vật chính là nguyên hàm của gia tốc $a(t)$.
- Từ đó ta lập công thức tính $v(t)=\int a(t)dt$, kết hợp với điều kiện vận tốc ban đầu $v_0=7m/s$.
- Suy ra công thức tính vận tốc $v(t)$ của vật tại thời điểm *t* và tính được *v(5)*.

Hướng dẫn giải:

- Vận tốc của vật tại thời điểm t được tính theo công thức
  $v(t)=\int a(t)dt=\int \dfrac{2}{t+2}dt=2\ln|t+2|+C$.
- Vì vận tốc ban đầu (lúc $t=0$) của vật là $v_0=6m/s$ nên
  $v(0)=2\ln|0+2|+C=7 \Leftrightarrow C=7-2\ln 2 \Rightarrow v(t)=2\ln|t+2|+7-2\ln 2$.
- Vận tốc của vật chuyển động tại giây thứ 5 là
  $v(5)=2\ln|5+2|+7-2\ln 2 \approx 9,51\ m/s$.

Câu 25: Chọn đáp án C.

- Độ cao của tên lửa là nguyên hàm của vận tốc, suy ra
  $s(t)=\int v(t)dt=\int(-9,8t+30)dt=-4,9t^2+30t+C_2$
  Vì $s(0)=0$ nên $s(0)=-4,9.0^2+30.0+C_2=0 \Leftrightarrow C_2=0 \Rightarrow s(t)=-4,9t^2+30t$.

[redacted]

Câu 26: Chọn đáp án B.

- Tốc độ phát triển của vi khuẩn tại ngày thứ t là $F'(t)=\dfrac{1000}{t+1}$. Suy ra số lượng vi khuẩn vào ngày thứ t được tính theo công thức
  $F(t)=\int F'(t)dt=\int \dfrac{1000}{t+1}dt=1000\ln|t+1|+C=1000\ln|t+1|+C$.

[redacted]

- Số vi khuẩn sau 10 ngày là $F(10) = 1000\ln|2.10+1| + 2000 = 5044,52$ con và bệnh nhân không cứu được.

Câu 27: Chọn đáp án B.

- Ta có sau $15s$ thì xe đạt vận tốc $15m/s$ (áp dụng $v = v_0 + at$)

$$\Rightarrow 15 = 12 + a.15 \Rightarrow a = \frac{1}{5} = 0.2\left(m/s^2\right)$$

- Vận tốc mà xe đạt sau 30s là $v = 12 + 0,2t$
- Vậy quãng đường xe đi được sau khi tăng tốc 30s là $S = \int_0^{30}(12+0.2t)dt = 450m$.

Câu 28: Chọn đáp án A.

Khi kéo lò xo từ 10 cm đến 15 cm nó bị kéo căng thêm 5 cm = 0,05 m.

$\Rightarrow f(0,05) = 40 \Leftrightarrow 0,05k = 40 \Rightarrow k = 800$. Do đó $f(x) = 800x$

- Công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 15 cm đến 20 cm là $W = \int\limits_{0,05}^{0,1} f(x)dx$

$$\Rightarrow W = \int\limits_{0,05}^{0,1} f(x)dx = \int\limits_{0,05}^{0,1}(800x)dx = 800\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0,05}^{0,1} = 3\ (J)$$

Câu 29: Chọn đáp án B.

Số lượng máy tính từ đầu tuần thứ 3 đến hết tuần thứ 4 là:

$$\int\limits_3^4 2000\left(1 - \frac{10}{(10-t)^2}\right)dt \approx 1523$$

Câu 30: Chọn đáp án B.

Vận tốc của khí hít vào được mô hình bởi công thức $v(t) = V\sin\frac{3\pi t}{5}$. Suy ra lượng khí hít vào sau 2 giây là :

$$V(2) = \int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 V\sin\frac{3\pi t}{5}dt = \frac{5V}{3\pi}\left(1 - \cos\frac{3\pi 2}{5}\right) = 1,06V \text{ lít khí}$$

Câu 31: Chọn đáp án B.

Ta có: $100km/h = \frac{250}{9}m/s$, vận tốc nhanh dần đều là: $v = 20t + \frac{250}{9}$

Gọi t_0 là thời gian xe hoàn thành $4000 - 260 = 3740m$ còn lại.

$$\text{Ta có } S = \int_0^{t_0}\left(20t + \frac{250}{9}\right)dt = \left(10t^2 + \frac{250}{9}t\right)\Bigg|_0^{t_0} = 10t_0^2 + \frac{250}{9}t_0$$

$$\Rightarrow 10t_0^2 + \frac{250}{9}t_0 = 3740 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_0 = 18 \\ t_0 = -\frac{187}{9}\ (l) \end{array}\right. \Rightarrow t_0 = 18s$$

Thời gian xe hoàn thành 4km đường đua là $3 + 18 = 21s$.

Câu 32: Chọn đáp án C.

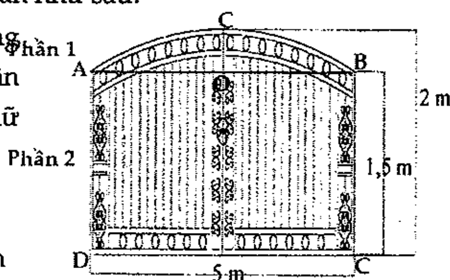
Ta có $18km/h = \frac{18}{3,6} = 5m/s$.

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $t: S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ vậy trong giây thứ 5 quãng đường nó đi được là $\Delta S = 5.5 + \frac{a.5^2}{2} - 5.4 - \frac{a.4^2}{2} = 5,9 \Rightarrow a = 0,2m/s^2$

Vậy quãng đường mà vật đi được sau $10s$ kể từ lúc bắt đầu chuyển động $S = \int_0^{10} (5 + 0,2t) dt = 60m$

Câu 33: Chọn đáp án C.

Từ hình vẽ ta chia cửa rào sắt thành 2 phần như sau: phần 1 là phần giới hạn bởi đường cong phía trên của cánh cửa với đoạn AB, phần này có diện tích S_1, phần 2 là hình chữ nhật ABCD có diện tích S_2.



Khi đó $S = S_1 + S_2 = S_1 + 5.1,5 = S_1 + 7,5$

Để tính S_1 ta vận dụng kiến thức diện tích hình phẳng của tích phân.

Gắn hệ trục Oxy trong đó O trùng với trung điểm AB, $OB \subset Ox, OC \subset Oy$,

Theo đề bài ta có đường cong có dạng hình Parabol.

Giả sử $(P): y = ax^2 + bx + c$

[redacted]

Diện tích $S_2 = 2\int_0^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{10}{6}(m^2) \Rightarrow S = \frac{55}{6}(m^2) \Rightarrow \frac{55}{6}.600.000 = 5.500.000$ đồng

Câu 34: Chọn đáp án A.

Ta có $i = \frac{u}{R} = 0,02\cos(100\pi t)$ (A). Ta có $i(t) = q'(t)$

Do đó $q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt$. Xét điện lượng từ $t = 0$ đến $t = \frac{1}{600}s$

Ta có: $q = 0,02 \int_0^{\frac{1}{600}} \cos(100\pi t) dt = 3,18.10^{-5} C$.

Câu 35: Chọn đáp án B.

Ta có $v = \int a(t) dt = \int \frac{-20}{(2t+1)^2} dt = \frac{10}{2t+1} + C$

Khi $t = 0 \Rightarrow v(0) = 40 \Leftrightarrow \frac{10}{1+2.0} + C = 40 \Leftrightarrow C = 30$

Do đó biểu thức vận tốc theo thời gian là $v(t) = 30 + \dfrac{10}{2t+1}(m/s)$.

Câu 36: Chọn đáp án A.

Ta biết rằng cường độ dòng diện là lượng điện tích đi qua tiết diện vật dẫn trong một đơn vị thời gian. Nếu gọi hàm $i(t)$ biểu thị cho cường độ dòng điện thì lượng điện tích $q(t)$ là nguyên hàm của $i(t)$.

[redacted]

Câu 37: Chọn đáp án D.

Lưu ý $1nF = 10^{-9}F$, $1\mu s = 10^{-6}s$.

Ta biết rằng điện tích $q(t)$ là nguyên hàm của cường độ dòng điện $i(t)$

Ta có $U_C = \dfrac{1}{C}\int i(t)dt = \dfrac{0{,}042.10^{-3}}{8{,}5.10^{-9}}\int tdt = \left(\dfrac{4{,}94.10^{3}}{2}\right)t^2 + K$

Theo giả thiết ta có $U(0) = 0 \Leftrightarrow K = 0$

Do đó $U_C(t) = 2{,}47.10^3t^2$

Khi $U_C(2\mu s) = 2{,}47.10^3\left(2.10^{-6}\right)^2 = 9{,}882.10^{-9} = 9{,}882\ nV$.

Câu 38: Chọn đáp án A.

[redacted]

$\Rightarrow A = 300\left(x^2\right)\Big|_{0,02}^{0,04} = 3{,}6\ N$.

Câu 39: Chọn đáp án A.

Gọi x là thời gian cần thiết để người đó đạt đến tốc độ 120km/h.

Ta nhận xét độ tăng vận tốc trong thời gian này cũng chính là tích phân của hàm *f(t)* với *t* = *0* đến *t* = *x*. Như vậy ta xét phương trình sau :

$$\int_0^x\left(\frac{1}{300}t^2 + \frac{1}{1350}t\right)dt = \frac{120}{3600} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{900}t^3 + \frac{1}{2700}t^2\right)\Bigg|_0^x = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{900}x^3 + \frac{1}{2700}x^2 = \frac{1}{30} \Leftrightarrow x = 3(s)$$

Câu 40: Chọn đáp án B.

Ta nhận xét nguyên hàm của f(t) và g(t) chính là hàm vận tốc của hai người.

Hàm vận tốc của người thứ nhất:

$$\int f(t)dt = \int\left(\frac{3}{100}t + \frac{1}{10}\right)dt = \frac{3}{200}t^2 + \frac{1}{10}t + C_1\,(m/s).$$

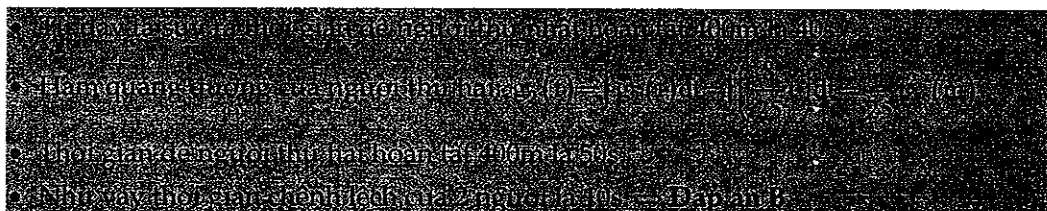
Do vận tốc đầu của cả hai người đều là 0m/s nên $C_1 = 0$, vậy hàm vận tốc của người thứ nhất là: $f_1(t) = \frac{3}{200}t^2 + \frac{1}{10}t \ (m/s)$.

Tương tự, hàm vận tốc của người thứ hai : $g_1(t) = \int \frac{8}{25}dt = \frac{8}{25}t \ (m/s)$.

Nguyên hàm của $f_1(t)$, $g_1(t)$ là hàm quãng đường của 2 người.

Hàm quãng đường của người thứ nhất:

$$f_2(t) = \int f_1(t)dt = \int\left(\frac{3}{200}t^2 + \frac{1}{10}t\right)dt = \frac{1}{200}t^3 + \frac{1}{20}t^2 \ (m)$$



[redacted]

Câu 41: Chọn đáp án A.

- Lúc bắt đầu đạp phanh, tức là tại thời điểm t_0, xe máy có vận tốc $v_0 = 8(m/s)$.
  Suy ra $v(t_0) = -4t_0 + 8 = 8 \Leftrightarrow t_0 = 0$.
- Khi xe máy dừng lại tại thời điểm t_1 thì vận tốc $v_1 = 0(m/s)$.
  Suy ra $v(t_1) = -4t_1 + 8 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2$.
- Ta có mối liên hệ giữa 2 đại lượng biến thiên quãng đường đi được $S(t)$ và vận tốc $v(t)$ là: *Nguyên hàm của vận tốc $v(t)$ chính là quãng đường đi được $S(t)$*. Suy ra quãng đường đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại là tích phân của hàm $v(t)$ khi thời gian t từ 0s đến 2s.

$$\int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (-4t+8)dt = \left(-4\frac{t^2}{2} + 8t\right)\Big|_0^2 = 8m.$$

Câu 42: Chọn đáp án A.

- Hàm vận tốc $v(t) = at^2 + bt + c$ có dạng là đường Parabol có đỉnh $I(10;50)$, đồng thời đi qua gốc tọa độ O(0;0), suy ra

[redacted]

- Theo đồ thị thì xe bắt đầu tăng tốc lúc $t = 0$ và đạt vận tốc cao nhất lúc $t = 10$ s nên quãng đường đi được của xe từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất

$$\int_0^{10} v(t)dt = \int_0^{10}\left(-\frac{1}{2}t^2 + 10t\right)dt = \left(-\frac{1}{6}t^3 + 5t^2\right)\Big|_0^{10} = \frac{1000}{3}m.$$

Câu 43: Chọn đáp án A.

- Số lượng của vi khuẩn tại ngày thứ t được mô hình bởi hàm số $B(t)$ là nguyên hàm của $B'(t)$.

$$B(t)=\int\frac{1000}{(1+0,25t)^2}dt=1000\int(1+0,25t)^{-2}dt=-\frac{1000}{0,25(1+0,25t)}+C.$$

- Số lượng vi khuẩn lúc ban đầu là 600 con trên mỗi ml nước nên:

$$B(0)=600\Leftrightarrow -\frac{1000}{0,25(1+0,25.0)}+C=600\Leftrightarrow C=4600.$$

- Suy ra hàm số biểu thị cho số lượng vi khuẩn tại ngày thứ t là

$$B(t)=-\frac{1000}{0,25(1+0,25t)}+4600.$$

- Số lượng vi khuẩn dưới 4000 con trên mỗi ml nước thì người bơi vẫn an toàn; và người bơi không an toàn khi

$$B(t)\ge 4000\Leftrightarrow -\frac{1000}{0,25(1+0,25t)}+4600\ge 4000$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1000}{0,25(1+0,25t)}\ge -600\Leftrightarrow 1+0,25t\ge\frac{20}{3}\Leftrightarrow t\ge\frac{68}{3}\approx 22,67.$$

- Vậy sau ngày thứ 23 thì số lượng vi khuẩn sẽ là 4000 con và hồ bơi bắt đầu cần thay nước

Câu 44: Chọn đáp án A.

Ta biết rằng chiều cao $h(t)$ của mực nước bơm được chính là nguyên hàm của tốc độ tăng $h'(t)$ của chiều cao mực nước.

$$h(t)=\int h'(t)dt=\int\frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}\,dt=\frac{3}{2000}(t+3)^{\frac{4}{3}}+C.$$

Lúc ban đầu (tại $t=0$) hồ bơi không chứa nước, nghĩa là

$$h(t)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2000}(0+3)^{\frac{4}{3}}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000}.$$

Suy ra mực nước bơm được tại thời điểm t giây là $h(t)=\frac{3}{2000}(t+3)^{\frac{4}{3}}-\frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000}$.

Theo giả thiết, lượng nước bơm được bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi nên ta có

$$h(t)=\frac{3}{4}h_1\Leftrightarrow\frac{3}{2000}(t+3)^{\frac{4}{3}}-\frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000}=\frac{3}{4}.300\Rightarrow t\approx 7619s.$$

Vậy sau khoảng thời gian 2 giờ 7 phút thì bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi.

Câu 45: Chọn đáp án A.

Lượng nước lũ đã xả trong khoảng thời gian 30 phút (1800 giây) sẽ bằng:

$$L=\int_0^{1800}v'(t)dt=\int_0^{1800}(10t+500)dt=\left(5t^2+500t\right)\Big|_0^{1800}=17,1.10^6\left(m^3\right)$$

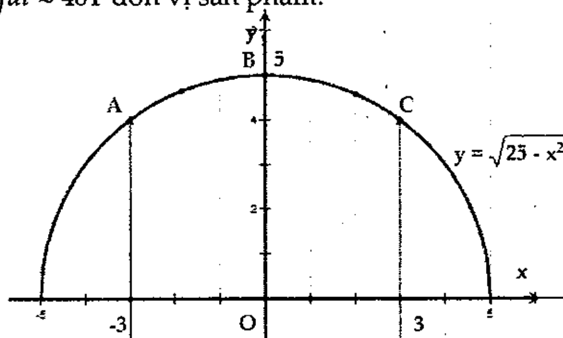
Vậy trong khoảng thời gian 30 phút, nhà máy đã xả một lượng nước là 17,1 triệu khối, tức là hồ chứa nước đã thoát đi 17,1 triệu khối nước.

Câu 46: Chọn đáp án A.

- Gọi $S(t)$ là số đơn vị sản phẩm mà công nhân sản xuất được sau t giờ tính từ lúc 7 giờ sáng. Ta có $S'(t) = q(t) = 100 + e^{-0,5t}$
- Số đơn vị sản phẩm người đó sản xuất được từ 8 giờ sáng $(t = 1)$ đến 11 giờ trưa $(t = 5)$ là $\int_1^5 q(t)\,dt = \int_1^5 \left(100 + e^{-0,5t}\right)dt \approx 401$ đơn vị sản phẩm.

Câu 47: Chọn đáp án A.

Xét đường cong cạnh bên của cái lu là đường AC và chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Khi đó ta có

$BC : y = \sqrt{25 - x^2} > 0$

Khi đó thể tích của cái lu chính là

$$V_{lu} = 2\pi\int_0^3 \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 dx = 132\pi \left(dm^3\right)$$

Câu 48: Chọn đáp án C.

Gắn mặt phẳng tọa độ Oxy trùng với mặt cắt vuông góc với hình trụ

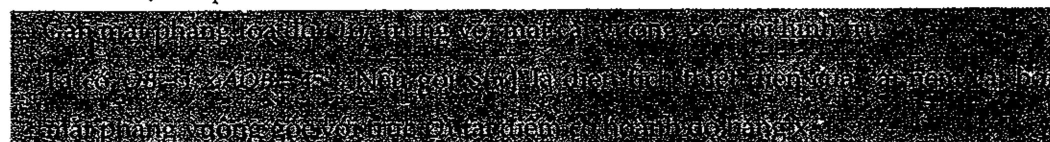
Ta có $OB = 4, \measuredangle AOB = 30^0$. Nếu gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của cái nêm cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x.

Cụ thể $S(x)$ là diện tích của các tam giác vuông tại đỉnh thuộc cung Bx.

Do đó $S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}\sqrt{16 - x^2}\,tan30^0 = \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}$

Khi đó thể tích của cái nêm bằng $V = 2\int_0^4 S(x)dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^4 \left(16 - x^2\right)dx = \frac{128\sqrt{3}}{9}\left(cm^3\right)$

Câu 49: Chọn đáp án B.


[redacted]

Cụ thể $S(x)$ là diện tích của các tam giác vuông tại đỉnh thuộc cung Bx.

Do đó $S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - x^2}\,tan45^0 = \frac{1 - x^2}{2}$

Khi đó thể tích của cái nêm bằng $V = 2\int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)dx = \frac{2}{3}\left(m^3\right)$.

Câu 50: Chọn đáp án A.

Gắn mặt phẳng tọa độ Oxy trùng với mặt cắt vuông góc với hình trụ

Ta có $OB = 15, \measuredangle AOB = 45^0$. Nếu gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của cái nêm cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x.

[redacted]

Câu 51: Chọn đáp án C.

Vận tốc của viên đạn biểu diễn theo t giây là $v(t) = 40 - 9,8t$.

Viên đạn đạt độ cao lớn nhất khi nó dừng lại, lúc đó $0 = 40 - 9,8t \Rightarrow t = \dfrac{200}{49}$

Quãng đường viên đạn đi từ lúc bắt đầu đến khi đạt độ cao lớn nhất là

$$s = \int_0^{\frac{200}{49}} v(t)dt = \frac{4000}{49}m$$

Vậy quãng đường viên đạn đi từ lúc bắt đầu đến khi chạm đất là $2s = \dfrac{8000}{49} \approx 163m$.

Câu 52: Chọn đáp án C.

Kể từ lúc hãm phanh ($t = 0$) đến lúc dừng lại ($t = 3$) thì ô tô A di chuyển được một đoạn đường $a = \int_0^3 v_A(t)dt = \int_0^3 (12 - 4t)dt = 18(m)$.

Vì ô tô B đứng yên nên ta suy ra ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là 19m để đảm bảo khoảng cách an toàn khi dừng.

Câu 53: Chọn đáp án B.

- Nguyên hàm của gia tốc $a(t) = \dfrac{1}{20}(-t^3 + 30t)$ là vận tốc $v(t)$ nên ta có

$$v(t) = \int a(t)dt = \frac{1}{20}\int(-t^3 + 30t)dt = \frac{1}{20}\left(-\frac{t^4}{4} + 15t^2\right) + C.$$

[redacted]

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. PGS.TS Lê Thị Hoài Châu, Mô hình hóa trong dạy học khái niệm đạo hàm.
2. TS. Trần Thị Tuấn Anh, Bài toán ứng dụng cực trị trong kinh tế.
3. SV Nguyễn Đình Hoàn, Ứng dụng các bài toán Min-Max.
4. GV Trần Thị Mai, Toán đạo hàm trong phân tích kinh tế.
5. SV Bùi Lê Phạm Mỹ Phương, Ứng dụng các bài toán thực tiễn.
6. GV Phạm Thị Thu, Một số ứng dụng đạo hàm trong cuộc sống.
7. TS Vũ Hữu Tuyên, Thiết kế bài toán hình học gắn với thực tiễn trong dạy học hình học ở trường THPT.
8. GV Phạm Việt Dũng, Một số ứng dụng toán học trong vật lý.
9. SV Trần Thị Phượng, Hàm số và mô hình toán học.
10. Tập thể học sinh lớp 12A1 khóa 2015, THPT Nguyễn Hữu Thọ, Một số bài toán ứng dụng toán học phổ thông 12 trong thực tiễn.
11. Trình Minh Đức, ứng dụng đạo hàm vào các bài toán thực tế.
12. Murray Bourne, đạo hàm tích phân ứng dụng được gì ?, www.intmath.com
13. GV Trần Ngọc Lam, SKKN Phát huy tính tích cực chủ động của học sinh khi học môn toán bằng các ví dụ thực tiễn và liên môn, 2015.
14. SV Nguyễn Nhật Minh, Giới thiệu ứng dụng đạo hàm, 2014.
15. Thầy Nguyễn Thành Hiển, Tài liệu Nhóm Toán.
16. Thầy Trần Văn Tài, Tài liệu tổng hợp toán thực tiễn.
17. Tài liệu Toán học Bắc Trung Nam (http://toanhocbactrungnam.vn)
18. PGS.TS Nguyễn Ngọc Định, Toán Tài Chính, Đại học Kinh Tế Tp.Hồ Chí Minh.
19. PGS.TS Lê Thị Hoài Châu, Phương pháp dạy – học hình học ở trường Trung học phổ thông, Trường Đại học Sư phạm TP.HCM, 2008.
20. Daniel C.Alexander, Geralyn M.Koeberlein, Elementary Geometry for College students, Cengage Learning, 2010.
21. Phạm Thị Liên, Tăng tốc kĩ năng giải toán trắc nghiệm chuyên đề : Ứng dụng đạo hàm vào bài toán thực tế, 2016.
22. Bộ Giáo Dục và Đào tạo, Tài liệu Tập huấn PISA 2015 và các dạng câu hỏi do OECD phát hành lĩnh vực Toán học, 2014.
23. Huỳnh Quốc Hào, Chuyên đề Bài toán Thực tế, 2016.

Mục lục

NHÀ XUẤT BẢN THANH HÓA
Số 248 – Trần Phú – P. Ba Đình – TP. Thanh Hóa
Điện Thoại: (037). 3723.797 – 3853.548
Fax: (037) 3853.548
E-mail: nxbthanhhoa@yahoo.com

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN TRẮC NGHIỆM THỰC TẾ

HỨA LÂM PHONG (Chủ biên) – NINH CÔNG TUẤN
ThS. ĐINH XUÂN NHÂN – PHẠM VIỆT DUY KHA

Chịu trách nhiệm xuất bản
ThS. HOÀNG VĂN TÚ

Chịu trách nhiệm nội dung
NGUYỄN HỮU NGÔN

Biên tập: **BÙI THỊ NGỌC DIỆP**
Vẽ bìa: **Công ty 1990Agency**
Trình bày: **Công ty KHANG VIỆT**
Sửa bản in: **Công ty KHANG VIỆT**

Đối tác LKXB:



CÔNG TY TNHH MTV
DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P.Đa Kao - Q.1 - TP.HCM
Điện thoại: 08. 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968
Fax: 08. 3911 0880
Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn
Gmail: nhasachkhangviet@gmail.com
Website: www.khangvietbook.com.vn

ISBN: 978-604-74-2941-7
In: 1.000 cuốn. Khổ: 20x30 cm, tại: CÔNG TY TNHH SX DV TM Bao Bì Kiến Á.
Địa chỉ: 320/32A Trần Bình Trọng, P.4, Q.5, TP. Hồ Chí Minh.
Số xác nhận ĐKXB: 4582-2016/CXBIPH/12-98/ThaH, ngày 14 tháng 12 năm 2016
QĐ xuất bản số 588/QĐ-NXBThaH, ngày 16 tháng 12 năm 2016.
In xong và nộp lưu chiểu: Quý I/2017